Ministerium für Bildung und Kultur
SAARLAND

Lehrplan

Mathematik

Gymnasium

Klassenstufe 9

- Erprobungsphase -

2016

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufe 9

Im Unterricht der Klassenstufe 9 wird die Behandlung der Themenbereiche ebene Geometrie, Algebra und Stochastik zu einem vorläufigen Abschluss gebracht. Dieser bestimmt den Maßstab für das Konzept-, Fakten-, Theorie-, Methoden- und Prozesswissen, woran beim Eintritt in die Oberstufe der Gymnasien das Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler zu messen ist.
Der Einstieg in den Lernbereich Trigonometrie erfolgt über Ähnlichkeit.
Die Stochastik begleitet mit dem Begriff der "bedingten Wahrscheinlichkeit" die grundlegende Modellierung "mehrstufiger Zufallsexperimente".
In der Algebra werden mit den "quadratischen Gleichungen und Ungleichungen" sowie den "Potenzen und Potenzfunktionen" klassische Mittelstufenthemen behandelt.
Mit den quadratischen Funktionen und den Potenzfunktionen samt der Kehrwertfunktion werden wichtige Funktionenklassen bereitgestellt. Der Einsatz digitaler Werkzeuge fördert ein nachhaltiges Erschließen verschiedener Aspekte des Funktionsbegriffs. Insbesondere das Experimentieren und Visualisieren im Umfeld der Operationen mit Grundfunktionen sind ein Beispiel für den Mehrwert der digitalen Werkzeuge. Zudem ermöglichen sie den unmittelbaren Vergleich von graphischen, numerischen und algebraischen Darstellungen.

Lernbereiche der Klassenstufe 9

Lernbereiche Klassenstufe 9	**Mathematik**
1. Trigonometrie	etwa 30 Prozent der Unterrichtszeit
1.1 Ähnliche Dreiecke	
Ähnliche Figuren und Körper im Alltag Zentrische Streckung und Ähnlichkeit Ähnlichkeitssätze für Dreiecke Alltagsbezüge Hinweise	
1.2 Sinus, Kosinus, Tangens	
Sinus, Kosinus und Tangens als Verhältnis von Seitenlängen Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis Sinussatz und Kosinussatz Anwendungen Hinweise	
2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	etwa 30 Prozent der Unterrichtszeit
Quadratfunktion Operationen mit der Quadratfunktion Termdarstellungen quadratischer Funktionen Quadratische Gleichungen und Ungleichungen Hinweise	
3. Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Verknüpfen von Ereignissen Mehrstufige Zufallsexperimente Bedingte Wahrscheinlichkeit Unabhängigkeit zweier Ereignisse Hinweise	
4. Potenzen und Potenzfunktionen	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Terme Potenzen mit natürlichen Exponenten Potenzen mit ganzzahligen Exponenten Potenzen mit rationalen Exponenten Terme mit Potenzen Hinweise	

1. Trigonometrie	**Mathematik 9**

In der Klassenstufe 8 wurden mit der Satzgruppe des Pythagoras erste Schritte zur Berechnung von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken getan. Die trigonometrischen Methoden liefern Instrumente, mit denen nun beliebige Dreiecke untersucht werden. Die Zusammenhänge zwischen Innenwinkeln und Seitenlängen erweisen sich sowohl innermathematisch als auch in vielen Anwendungsbereichen als nützlich.
Der Ähnlichkeitsbegriff kann als Verallgemeinerung des Kongruenzbegriffs aufgefasst werden. Der Zugang erfolgt abbildungsgeometrisch durch die Behandlung der zentrischen Streckung. Beweise der Ähnlichkeitssätze sind nicht verpflichtend; im Mittelpunkt steht das Anwenden des Ähnlichkeitsbegriffs, auch bei der Herleitung und Begründung geometrischer Sätze sowie bei physikalischen Zusammenhängen.
Die trigonometrische Flächenformel ermöglicht eine formal einfache iterative Annäherung des Flächenmaßes eines Kreises. Digitale Werkzeuge erleichtern hierbei die numerische Auswertung und die grafische Veranschaulichung.
Die Leitideen „Messen“ und „Raum und Form“ sowie „Funktionaler Zusammenhang“ treten je nach Kontext mehr oder weniger deutlich in den Vordergrund.

1.1. Ähnliche Dreiecke

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Ähnliche Figuren und Körper im Alltag • Ähnlichkeit im Alltag • maßstäbliches Vergrößern bzw. Verkleinern im Alltag • Symbol ~	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben Ähnlichkeitsbeziehungen ebener bzw. räumlicher Objekte des Alltags **(K3)** • nennen technische Vorrichtungen zum Erzeugen ähnlicher Objekte, z. B. Projektor und Fotokopiergerät **(K3)**
Zentrische Streckung und Ähnlichkeit • <u>Definition:</u> Eine Zuordnung von Punkten heißt zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ($k > 0$), wenn gilt: Jedem Punkt P wird ein Punkt P' auf der Halbgeraden h_{ZP} so zugeordnet, dass $\lvert\overline{ZP'}\rvert = k \cdot \lvert\overline{ZP}\rvert$ gilt. • Eigenschaften: – Parallelität von Gerade und Bildgerade – Winkeltreue – Z als Fixpunkt – Änderung der Streckenlänge mit dem Faktor k – Änderung des Flächeninhalts mit dem Faktor k^2 – Änderung des Volumens mit dem Faktor k^3 • Ähnlichkeit • Kongruenz als Sonderfall von Ähnlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • führen zentrische Streckungen von Figuren für einfache Streckfaktoren mit Zeichengeräten durch **(K5)** • nutzen dynamische Geometriesoftware, um Eigenschaften zentrischer Streckungen zu entdecken **(K4)** • identifizieren entsprechende Seiten bzw. Winkel bei einer zentr. Streckung **(K4)** • bezeichnen Figuren als ähnlich, wenn die eine durch eine zentrische Streckung, Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung oder deren Hintereinanderausführung in die andere überführt werden kann **(K1)** • verwenden Eigenschaften einer zentrischen Streckung bei der Konstruktion ähnlicher Figuren **(K2)** • begründen die Entstehung der Faktoren bei Änderung von Flächen- und Rauminhalt mit Hilfe der Formeln für Rechteck bzw. Quader **(K1)** • untersuchen Rechtecke durch geeignete Messungen auf Ähnlichkeit **(K1)** • begründen, dass Kongruenz ein Sonderfall von Ähnlichkeit ist **(K1)**

1. Trigonometrie	**Mathematik 9**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Zentrische Streckung und Ähnlichkeit (Fortsetzung) • Strahlensatzfiguren	Die Schülerinnen und Schüler • bezeichnen eine Geradenkreuzung, die von zwei Parallelen geschnitten wird, als Strahlensatzfigur **(K5)** • identifizieren ähnliche Dreiecke in Strahlensatzfiguren **(K2)** • berechnen fehlende Streckenlängen in geeigneten Strahlensatzfiguren **(K5)**
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke • Ähnlichkeitssätze sss, sws und Ssw • Ähnlichkeitssatz ww	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Ähnlichkeitsätze in Analogie zu den Kongruenzsätzen wieder **(K6)** • begründen, dass gleichseitige Dreiecke bzw. Quadrate ähnlich sind **(K1)** • leiten den Höhensatz mit Hilfe der Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks in zueinander ähnliche Teildreiecke her **(K2)**
Alltagsbezüge • maßstabsgerechte Karten • Höhenbestimmung durch Anpeilen • Projektion und Schattenwurf • Seitenlängen der DIN-Formate	Die Schülerinnen und Schüler • erstellen maßstabsgerechte Zeichnungen zur Bestimmung der Längen unzugänglicher Strecken **(K2)** • bestimmen die Höhe eines Baumes oder des Schulgebäudes mit dem Försterdreieck **(K2)** • begründen die Festlegung des Seitenverhältnisses bei DIN-Formaten **(K1)**

Hinweise

zu Lernbereich 1.1 (Ähnliche Dreiecke)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Auf Beweise wird in diesem Lernbereich weitgehend verzichtet; im Vordergrund steht ein konkretes exemplarisches Vorgehen zur Erarbeitung und zum Verständnis der Begriffe.
- Die Bedeutung der Ähnlichkeit als zentrales mathematisches Konzept und Grundlage vieler Anwendungen im Alltag ist darzulegen.
- Der Lernbereich bietet vielfältige Gelegenheiten, geometrische Sachverhalte zu wiederholen.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Erstellen von Karten zu den drei klassischen Grundaufgaben der „Feldmessung“ (Johann Friedrich Penther 1693-1749)
- Messen von Höhen im Gelände
- Entdecken der Eigenschaften zentrischer Streckungen durch den Einsatz von Geometriesystemen
- Erzeugen selbstähnlicher Figuren mit Geometriesystemen, z. B. die Koch´sche Schneeflocke
- Bau und Verwendung eines Storchschnabels (real und/oder mittels DGS)

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Kongruenz
- Klassenstufe 8: Flächeninhaltsberechnungen
- Lernbereich 1.2: Sinus, Kosinus, Tangens

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Lochkamera, Fotografie, Diaprojektion
- Abbildung durch Sammellinsen
- Landkarten und Vermessungen

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesysteme

Fakultative Inhalte

- Strahlensätze
- Strahlengang bei der Lochkamera / Erweiterung des Begriffs „Zentrische Streckung“
- Sekantensatz, Sehnensatz
- Kathetensatz

1.2. Sinus, Kosinus, Tangens

Verbindliches Fachwissen

Sinus, Kosinus und Tangens als Verhältnis von Seitenlängen

- Definition:
  Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C heißt der Quotient:
  – aus der Länge a der Gegenkathete von Winkel α und der Länge c der Hypotenuse der Sinus von α:
  $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$
  – aus der Länge b der Ankathete von Winkel α und der Länge c der Hypotenuse der Kosinus von α:
  $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
  – aus der Länge a der Gegenkathete und der Länge b der Ankathete von Winkel α der Tangens von α:
  $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$
- Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:
  – $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (\alpha \neq 90°)$
  – $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$,
  $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$
  – $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$
- Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte bei 0° und bei 90° als Grenzfälle
- Besondere Werte von Sinus, Kosinus und Tangens

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

Verbindliche Kompetenzschwerpunkte

Die Schülerinnen und Schüler
- verwenden die Bezeichnungen Ankathete, Gegenkathete sowie Hypotenuse situationsgerecht **(K4)**
- begründen, dass in ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken die gleichen Sinus-, die gleichen Kosinus- und Tangenswerte auftreten **(K1)**
- begründen für $0 \leq \alpha \leq 90°$, dass zum größeren Winkel der größere Sinuswert gehört **(K1)**
- identifizieren Seitenverhältnisse an rechtwinkligen Dreiecken als Sinus-, Kosinus- oder Tangenswert entsprechender Winkel **(K6)**
- bestimmen mit dem Taschenrechner Sinus-, Kosinus- oder Tangenswert eines Winkels über das Seitenlängenverhältnis und direkt **(K5)**
- berechnen in Kontexten fehlende Stücke in rechtwinkligen Dreiecken unter Verwendung von Sinus, Kosinus und Tangens **(K3)**
- begründen einfache Beziehungen zwischen Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten **(K1)**
- leiten Werte von Sinus, Kosinus und Tanges für Winkel am gleichseitigen und am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck her **(K1)**
- geben die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für besondere Winkel an **(K6)**
- belegen, dass der Zusammenhang zwischen dem Winkelmaß und dem Sinus-, bzw. Kosinus- bzw. Tangenswert jeweils nicht proportional ist **(K6)**

1. Trigonometrie	**Mathematik 9**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis • $P(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha))$ als Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten • weitere Definition von Sinus und Kosinus als Koordinaten der Punkte $P(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha))$ des Einheitskreises • Wertebereich von Sinus und Kosinus – $\sin(\alpha) \in [-1;1]$, $\cos(\alpha) \in [-1;1]$ – Vorzeichentabellen für die Quadranten • Symmetrien am Einheitskreis, z. B. $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ • erweiterte Definition von $\tan(\alpha)$ als vorzeichenergänzte Länge des Abschnitts der Tangente in $(1 \mid 0)$ an den Einheitskreis	Die Schülerinnen und Schüler • begründen die Vereinbarkeit der beiden Definitionen von $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ für Punkte des Einheitskreises im ersten Quadranten **(K1)** • bestimmen Näherungswerte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ durch Messung am Einheitskreis (z. B. mit Radius 1 dm) **(K4)** • begründen die angegebenen Wertebereiche **(K1)** • erläutern die Symmetrien am Einheitskreis **(K6)** • bestimmen Näherungswerte von $\tan(\alpha)$ durch Messung am Einheitskreis (z. B. mit Radius 1 dm) **(K4)** • bestimmen für die einzelnen Quadranten die Vorzeichen der Sinus-, Kosinus- bzw. Tangenswerte **(K5)** • begründen, dass $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ für $0° \le \alpha \le 360°$ ($\alpha \neq 90°$ und $\alpha \neq 270°$) gilt **(K1)**
Sinussatz und Kosinussatz • <u>Sinussatz:</u> In einem Dreieck ABC verhalten sich die Längen je zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel: $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$, $\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$, $\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$ • <u>Kosinussatz:</u> In einem Dreieck ABC ist die Länge jeder Seite durch die Längen der beiden anderen Seiten und das Maß des von ihnen eingeschlossenen Winkels bestimmt, so dass gilt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$	Die Schülerinnen und Schüler • leiten den Sinussatz für beliebige Dreiecke her **(K1)** • geben den Sinussatz verbal wieder **(K6)** • leiten eine der Gleichungen des Kosinussatzes am Beispiel eines spitzwinkligen Dreiecks her **(K1)** • prüfen an Beispielen die Allgemeingültigkeit des Kosinussatzes, z. B. unter Verwendung von dynamischer Geometriesoftware **(K4)** • identifizieren den Satz von Pythagoras als Spezialfall des Kosinussatzes **(K1)** • erläutern die Vertauschbarkeit der Bezeichnungen in den Formeln von Sinussatz und Kosinussatz **(K6)** • übertragen die Formeln von Sinus- und Kosinussatz auf Dreiecke mit anderen Variablennamen **(K6)** • berechnen in Kontexten fehlende Stücke in Dreiecken mithilfe von Sinussatz oder Kosinussatz **(K5)**

1. Trigonometrie	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Anwendungen • Steigung und Steigungswinkel einer Geraden: $m = \tan(\alpha)$ • Flächeninhalt eines Dreiecks ABC : $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$ und entsprechende Vertauschungen • Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreisradius r : $A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$ • Flächeninhalt des Kreises $A = \pi \cdot r^2$ durch Grenzwertbetrachtung bei einer n-Eck-Folge • Aufgaben mit Alltagsbezug, auch in räumlichen Situationen	Die Schülerinnen und Schüler • erklären am Steigungsdreieck den Zusammenhang zwischen Steigung und Steigungswinkel **(K1)** • begründen die Gültigkeit der Flächeninhaltsformeln für Dreieck und $n-$Eck **(K1)** • vollziehen mithilfe einer Tabellenkalkulation nach, dass sich $\frac{n}{2} \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$ für größer werdende n der Zahl π annähert **(K5)** • berechnen fehlende Größen in Figuren und Körpern mittels geeigneter Dreiecke **(K1)** • überprüfen ihre Lösungen auf Plausibilität im Anwendungskontext **(K3)**

Hinweise

zu Lernbereich 1.2 (Sinus, Kosinus, Tangens)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Steigungswinkel bei fallenden Geraden können ohne systematische Vertiefung negativ orientiert eingeführt werden (entsprechend der Winkelausgabe des Taschenrechners).
- Tiefergehende Betrachtungen zur Existenz und Definition des Flächenmaßes krummlinig berandeter Flächen (hier: Kreis) sind nicht vorgesehen.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Bestimmung von Längen unzugänglicher Stecken z. B. im Schulumfeld (Planung, Messung, Berechnung und Dokumentation der Vorgehensweise)

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Geometrie
- Klassenstufe 8: Satzgruppe des Pythagoras
- Klassenstufe 10: Allgemeine Sinusfunktion
- Klassenstufe 10: Stereometrie
- Hauptphase: Analytische Geometrie

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Baukörper in der Architektur (z. B. ägyptische Pyramiden, Dachkonstruktionen), Vermessungsprobleme
- Kräftezerlegung und Kräfteaddition, Brechungsgesetz und Fermatprinzip, Interferenz am Gitter, Braggsche Reflexionsbedingung

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesysteme

Fakultative Inhalte

- algebraischer Beweis des Kosinussatzes
- Nichtlinearität von Sinus und Kosinus
- Additionstheorem: $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	**Mathematik 9**

Mit der Behandlung quadratischer Funktionen lernen die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Klasse nicht linearer Funktionen kennen. Der Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Funktionsgraphen sollte exemplarisch unter den Aspekten „Streckung in y-Richtung" und „Verschiebungen in den Achsenrichtungen" auch mit digitalen Werkzeugen und Medien untersucht werden. Die Zusammenhänge zwischen Term und Graph sowie weitere zu untersuchende Eigenschaften werden in höheren Klassenstufen bei anderen Funktionstypen wieder aufgegriffen.

Die Frage nach den Nullstellen führt unmittelbar auf quadratische Gleichungen. Die Lösung quadratischer Gleichungen und Ungleichungen sowie die Bedingungen für die Lösbarkeit ergeben sich im Zusammenspiel mit den Graphen der entsprechenden Funktionen.

In diesem Lernbereich sind primär die Leitideen „Funktionaler Zusammenhang" sowie „Algorithmus und Zahl" angesprochen.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Quadratfunktion • <u>Definition:</u> Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ heißt Quadratfunktion. Ihr Graph heißt Normalparabel. • Eigenschaften – Definitionsmenge $\mathbb{R}$ – Wertemenge $\mathbb{R}_0^+$ – Funktionsgleichung $y = x^2$ – Graph – Nullstelle, Scheitelpunkt, Tiefpunkt – Öffnungsrichtung – Steigungsverhalten – Symmetrie der Normalparabel	Die Schülerinnen und Schüler • erstellen eine Wertetabelle zur Quadratfunktion und aus dieser den Funktionsgraphen **(K4)** • stellen die Quadratfunktion in den Zusammenhang mit dem Flächeninhalt von Quadraten **(K3)** • belegen die Eigenschaft: dem k-fachen x-Wert wird der k^2-fache y-Wert zugeordnet **(K1)** • nutzen die Eigenschaft: dem k-fachen x-Wert wird der k^2-fache y-Wert zugeordnet **(K3)** • skizzieren die Normalparabel unter Berücksichtigung repräsentativer Punkte und charakteristischer Eigenschaften **(K4)** • bestimmen zu Punkten der Normalparabel Funktions- und Ausgangswerte **(K5)** • begründen die Symmetrie der Normalparabel **(K1)** • beschreiben die Lage und den Verlauf der Normalparabel unter Verwendung der Fachsprache **(K6)**

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	**Mathematik 9**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Operationen mit der Quadratfunktion • Verschiebung in y-Richtung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2 + d,\ d \in \mathbb{R}$ • Verschiebung in x-Richtung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto (x - x_0)^2,\ x_0 \in \mathbb{R}$ • Spiegelung an der x-Achse: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto -x^2$ • Streckung in y-Richtung – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a \cdot x^2,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – Streckfaktor a – Spezialfall $a = -1$: Spiegelung an der x-Achse • Scheitelpunktform $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a \cdot (x - x_0)^2 + d$ – Scheitelpunkt $(x_0 \mid d)$ • Eigenschaften – Nullstellen – Öffnungsrichtung – Scheitelpunkt, Hoch-/Tiefpunkt – Symmetrieachse – Parabel als Graph	Die Schülerinnen und Schüler • erstellen Wertetabellen bei den unterschiedlichen Operationen und stellen jeweils den Zusammenhang zur Quadratfunktion her **(K1)** • skizzieren die Funktionsgraphen bei unterschiedlichen Operationen händisch **(K4)** • zeichnen die Funktionsgraphen zu Kombinationen von Operationen mit Hilfe eines Funktionenplotters mit Schiebereglern **(K4)** • beschreiben die Auswirkung der Variation der Parameter a, d und x_0 auf den Graphen der Funktion **(K6)** • erläutern, dass alle Parabeln mit dem gleichen Streckfaktor kongruent sind **(K1)** • erstellen Graphen und Scheitelpunktform anhand verbal vorgegebener Eigenschaften oder/und Operationen **(K2)** • lesen an Graphen Parameterwerte der Operationen ab und geben die Scheitelpunktform an **(K2)** • begründen, dass eine Parabel durch Angabe des Scheitels und des Streckfaktors eindeutig festgelegt ist **(K1)** • zeichnen Parabeln ausgehend von Gleichungen in Scheitelpunktform **(K5)** • beschreiben die Lage und den Verlauf von Parabeln unter Verwendung der Fachsprache **(K6)**

<table>
<tr><th colspan="2">2. Quadratische Funktionen und Gleichungen — Mathematik 9</th></tr>
<tr><th>Verbindliches Fachwissen</th><th>Verbindliche Kompetenzschwerpunkte</th></tr>
<tr><td>

Termdarstellungen quadratischer Funktionen

- Scheitelpunktform
$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto a\cdot(x-x_0)^2+y_0$
- Polynomform
$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto ax^2+bx+c$
- Nullstellenform
$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
falls Nullstellen x_1, x_2 vorliegen

</td><td>

Die Schülerinnen und Schüler

- überführen in konkreten Fällen die Scheitelpunktform in die Polynomform **(K5)**
- zeichnen für konkrete $a, b, c \in \mathbb{R}$ den Graph zu $y = ax^2 + bx + c$ **(K4)**
- identifizieren in der Polynomform a als Streckfaktor und c als y-Achsenabschnitt **(K1)**
- bestimmen experimentell die Lage der Scheitelpunkte der Parabeln zu $y = x^2 + bx + c$ bei Variation von b und konstantem c **(K2)**
- wandeln die Polynomform mittels der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform um **(K5)**
- erstellen ausgehend von geeigneten Graphen die Nullstellenform der Funktionsgleichung **(K4)**

- überführen in konkreten Fällen die Nullstellenform in die Polynomform **(K5)**
- bestimmen ausgehend von Nullstellen die Lage des Scheitels **(K2)**
- ordnen Graphen und Funktionsterme in den unterschiedlichen Darstellungsformen begründet einander zu **(K1)**
- verwenden begründet die passende Darstellungsform zur Lösung von Problemstellungen im Kontext **(K1)**

</td></tr>
</table>

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Quadratische Gleichungen und Ungleichungen • <u>Definition:</u> Eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a \neq 0$ heißt (allgemeine) quadratische Gleichung. Die Form $x^2+px+q=0$ der Gleichung heißt Normalform. • graphisches und rechnerisches Lösen quadratischer Gleichungen • Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ bzw. p^2-4q • <u>Satz von Vïeta:</u> Eine quadratische Gleichung der Form $x^2+px+q=0$ hat genau dann die Lösungen x_1 und x_2, wenn gilt: $p=-(x_1+x_2)$ und $q=x_1 \cdot x_2$ • Ungleichungen der Form $x^2+px+q \leq 0$ bzw. $x^2+px+q \geq 0$	Die Schülerinnen und Schüler • wandeln allgemeine quadratische Gleichungen in die Normalform um **(K5)** • identifizieren das Lösen einer quadratischer Gleichung als Nullstellenbestimmung einer quadratischen Funktion **(K1)** • bestimmen graphisch die Lösungsmenge quadratischer Gleichungen **(K5)** • begründen anhand von Graphen, dass eine quadratische Gleichung entweder keine, genau eine oder zwei Lösungen besitzen kann **(K1)** • bestimmen die Anzahl der Lösungen anhand der Eigenschaften und der Lage des entsprechenden Graphen im Koordinatensystem **(K1)** • berechnen Lösungen quadratischer Gleichungen in geeigneten Fällen durch Faktorisieren mittels – Ausklammern – binomischer Formeln – des Satzes von Vïeta **(K2)** • bestimmen die Lösungsmenge quadratischer Gleichungen mit dem Verfahren der quadratischen Ergänzung **(K5)** • erläutern, dass die Diskriminante die Anzahl der Lösungen bestimmt **(K1)** • lösen Aufgaben zu Sachkontexten, die auf quadratische Gleichungen führen, und begründen die Wahl der Darstellungsform **(K2)** • modellieren Extremwertaufgaben mit quadratischen Zielfunktionen und bestimmen die Extremwerte **(K3)** • schließen aus der Lösungsmenge der zugehörigen Gleichung auf die Lösungsintervalle einer quadratischen Ungleichung **(K1)** • geben die Lösungsmenge einer Ungleichung in Intervallschreibweise an **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 2 (Quadratische Funktionen und Gleichungen)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Um ein zügiges Zeichnen von Parabeln zu erreichen, kann die Verwendung von selbstgebastelten Schablonen zu $y = a \cdot x^2$ sinnvoll sein.
- Beim Zeichnen einer Parabel ist der Bezug auf ein implizites Hilfskoordinatensystem mit dem Ursprung im Scheitel hilfreich.
- Eine Parabel ist durch Angabe dreier ihrer Punkte eindeutig beschrieben, bei einer normierten Parabel genügen zwei ihrer Punkte.
- Die quadratische Ergänzung lässt sich geometrisch entsprechend der ersten bzw. zweiten binomischen Formel veranschaulichen.
- Beim Lösen quadratischer Gleichungen sollte immer zuerst geprüft werden, ob man ohne quadratische Ergänzung auskommt.
- Als Zusammenfassung des Verfahrens der quadratischen Ergänzung kann zusätzlich die $p-q-$Formel angegeben werden.
- Beim Modellbildungsprozess kann der Rechenaufwand durch geschickte Wahl des Koordinatensystems minimiert werden.
- Nachdem die reellen Zahlen bekannt sind, ist die Verwendung der Intervallschreibweise uneingeschränkt gerechtfertigt.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Erfassung/Darstellung von Wurfparabeln
  (z. B. mit dem Videoanalysetools „Tracker“: http://www.opensourcephysics.org/)
- Untersuchung von Bögen bei Bauwerken
  (z. B. Brückenbögen bei gleichmäßig verteilter Last)

Querverbindungen im Lehrplan

– Klassenstufe 7:	lineare Funktionen
– Klassenstufe 8:	binomische Terme
– Lernbereich 4:	Potenzfunktionen
– Klassenstufe 10:	Operationen mit der Sinusfunktion
– Klassenstufe 10:	Einführung in die Differentialrechnung
– Hauptphase:	Analysis

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Quadratische Abhängigkeiten zwischen Größen in den Naturwissenschaften
  (z. B. Bewegungsgleichungen, Flugbahnen, $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$)
- François Vïete (1540-1603)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Funktionenplotter (mit Schiebereglern zur Variation der Parameter)
- Überprüfung der Lösungen quadratischer Gleichungen mit Computeralgebrasystemen (CAS)

Fakultative Inhalte

- Parabel als Ortslinie
- Diskriminantenverfahren zur Bestimmung von Extremwerten quadratischer Funktionen bzw. von Tangenten an Parabeln
- Parabel als Kegelschnitt
- Parabel als Schnitt durch den Parabolspiegel (z. B. Satellitenfernsehn, Solarkocher)

3. Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit	Mathematik 9
Während in Klassenstufe 7 der Umgang mit Daten sowie die Entwicklung von Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einfache Anwendungen im Vordergrund stehen, werden die erworbenen Kompetenzen nun im Rahmen der systematischen Untersuchung mehrstufiger Zufallsexperimente erweitert. Dabei dominiert die Arbeit mit konkreten Beispielen; gleichwohl wird die formale mathematische Sprache weiterentwickelt. Als grundlegende Hilfsmittel der Modellierungen ergänzen einander Venn-Diagramm, Baumdiagramm und Vierfeldertafel. Die Leitidee „Daten und Zufall“ durchzieht diesen Lernbereich in prägender Weise.	
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Verknüpfen von Ereignissen • Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments • Darstellung von Ereignissen in einem Venn-Diagramm • ODER-Ereignis, Symbol $A \cup B$ • UND- Ereignis, Symbol $A \cap B$ • Vereinbarkeit, Unvereinbarkeit • Wiederholung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus Klassenstufe 7 • Zerlegungsregel: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ und $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ • Vierfeldertafel • Folgerung aus der Zerlegungsregel: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben verschiedene Ereignisse eines Zufallsexperiments **(K4)** • führen Zufallsexperimente durch und werten sie aus **(K5)** • verknüpfen Ereignisse durch ODER bzw. UND **(K5)** • identifizieren das Eintreten des ODER-Ereignis mit „mindestens eines der Ereignisse tritt ein“ **(K6)** • identifizieren das Eintreten des UND-Ereignis mit „beide Ereignisse treten zugleich ein“ **(K6)** • stellen sprachlich gefasste Verknüpfungen von Ereignissen mit Hilfe von Venn-Diagrammen dar **(K4)** • untersuchen Ereignisse auf Vereinbarkeit **(K1)** • veranschaulichen die Zerlegungsregel am Venn-Diagramm **(K4)** • übernehmen Angaben aus Texten in die Vierfeldertafel und ergänzen fehlende Angaben **(K3)** • verwenden die Vierfeldertafel auch zum Erfassen von Situationen mittels natürlicher Häufigkeiten **(K3)** • formen Vierfeldertafeln mit Wahrscheinlichkeiten in solche mit natürlichen Häufigkeiten um und umgekehrt **(K4)** • berechnen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zerlegungsregel bzw. der Vierfeldertafel in konkreten Situationen **(K5)** • erläutern die Folgerung aus der Zerlegungsregel **(K2)** • ordnen den Bereichen einer Vierfeldertafel Bereiche geeigneter Venn-Diagramme zu **(K4)**

3. Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Mehrstufige Zufallsexperimente • mehrmaliges Ziehen im Urnenmodell – ohne Zurücklegen – mit Zurücklegen • Ereignisse am Baumdiagramm – UND-Ereignis als Pfad – ODER-Ereignis als Zusammenfassung von Pfaden • Wahrscheinlichkeiten am Baumdiagramm – Einzelwahrscheinlichkeiten der Äste – erste Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades. – zweite Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade.	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele für mehrstufige Zufallsexperimente aus dem Alltag **(K3)** • führen mehrstufige Würfelexperimente durch und werten sie unter vorgegebenen Gesichtspunkten aus **(K5)** • stellen mehrstufige Zufallsexperimente (z. B. mehrmaliges Würfeln, mehrmaliges Ziehen aus einer Urne) in einem Baumdiagramm dar **(K4)** • geben zu vorgegebenen Baumdiagrammen passende Zufallsexperimente an **(K3)** • identifizieren jeden Pfad eines Baumdiagrammes mit einem Elementarereignis und verwenden zur Berücksichtigung der Reihenfolge die Tupelschreibweise **(K4)** • beschriften die Pfade im Baumdiagramm mit den zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten **(K3)** • simulieren mehrstufige Zufallsexperimente, auch mit digitalen Werkzeugen **(K5)** • verbalisieren die Pfadregeln **(K6)** • erläutern die erste Pfadregel in Analogie zu den Eigenschaften der relativen Häufigkeiten **(K1)** • berechnen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit Hilfe der Pfadregeln **(K5)**

3. Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Bedingte Wahrscheinlichkeit • Strukturieren von Daten nach Ereignissen und Gegenereignissen ($A, \overline{A}, B, \overline{B}$) mittels – Baumdiagramm bzw. umgekehrtes Baumdiagramm – Vierfeldertafel • bedingte Wahrscheinlichkeit, – $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – Veranschaulichung am Venn-Diagramm und am Baumdiagramm • Modellieren von Tests – richtig positiv bzw. negativ getestet – falsch positiv bzw. negativ getestet	Die Schülerinnen und Schüler • strukturieren Datenbeständen nach dem Auftreten zweier Merkmale A und B und ihrer Negationen **(K4)** • lesen aus Kontexten die strukturierenden Merkmale heraus **(K6)** • unterscheiden in Kontexten die bedingte Wahrscheinlichkeit von der Wahrscheinlichkeit des UND-Ereignisses **(K1)** • identifizieren Bedingungen in sprachlichen Beschreibungen von Kontexten **(K6)** • tragen Angaben aus Texten in Baumdiagramme und Vierfeldertafeln ein **(K3)** • identifizieren in Baumdiagrammen Wahrscheinlichkeitsangaben als bedingte Wahrscheinlichkeiten **(K4)** • berechnen bedingte Wahrscheinlich-keiten **(K5)** • grenzen $P_B(A)$ und $P_A(B)$ gegeneinander ab **(K1)** • berechnen Wahrscheinlichkeiten in Anwendungsaufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit **(K5)** • berechnen Wahrscheinlichkeiten bei der Umkehrung von Ereignis und Bedingung auch unter Verwendung des umgekehrten Baumdiagramms **(K5)** • diskutieren kontextbezogen die Zuverlässigkeit eines Tests **(K6)**
Unabhängigkeit zweier Ereignisse • stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen in Kontexten • <u>Definition:</u> Ein Ereignis A heißt (stochastisch) unabhängig vom Ereignis B ($B \neq \{\ \}$), wenn $P(A) = P_B(A)$ gilt. • wechselseitige Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B ($A, B \neq \{\ \}$) • <u>Satz</u>: Zwei Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit an Beispielen **(K6)** • nennen Beispiele für stochastische Abhängigkeit, z. B. beim mehrmaligen Ziehen ohne Zurücklegen **(K6)** • nutzen die Unabhängigkeit zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von UND-Ereignissen **(K5)** • untersuchen rechnerisch Ereignisse auf stochastische Abhängigkeit **(K5)** • unterscheiden die Begriffe „unvereinbar“ und „unabhängig“ **(K6)**

Hinweise

zu Lernbereich 3 (Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Im Rahmen einer Wiederholung empfiehlt es sich, an konkreten Zufallsexperimenten den Unterschied zwischen Anzahl und Anteil bzw. zwischen absoluter und relativer Häufigkeit herauszustellen.
- Am Ziegenproblem kann gut erlebt werden, dass Stochastik oft kontraintuitiv ist.
- In Kontexten vermischen sich die Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „relative Häufigkeit bei vielen Versuchen“ in sprachlich vielfältiger Weise. Das Verwenden einer relativen Häufigkeit als Schätzwert für Wahrscheinlichkeit sollte thematisiert werden. Das Hinzuziehen des Modellbildungskreislaufs trägt zur Klarheit bei.
- In Vierfeldertafeln können zur Verdeutlichung der Größenordnung von Wahrscheinlichkeiten diese durch natürliche Zahlen („natürliche Häufigkeiten“) repräsentiert werden.
- Bei mehr als zwei Ereignissen ist zwischen einer paarweisen stochastischen und einer allgemeinen stochastischen Unabhängigkeit zu unterscheiden. Dies wird in Klassenstufe 9 nicht thematisiert.
- Der Beleg, dass aus der Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B die Unabhängigkeit von $\overline{A}$ und B bzw. A und $\overline{B}$ sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$ folgt, erfolgt in der Oberstufe.
- Als Grundgerüst zum Erfassen von in Aufgabentexten gegebenen Wahrscheinlichkeitswerten ist sowohl das Baumdiagramm als auch das entsprechende umgekehrte Baumdiagramm zu betrachten.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Recherchieren der Güte medizinischer Tests
- Durchführung, Simulation und Auswertung realer Experimente
- Erstellen und Auswerten einer Umfrage innerhalb der Schulgemeinschaft zu einer sensiblen Frage in einem RRT-Verfahren (Randomized-Response-Technik)

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 6: Rationale Zahlen
- Klassenstufe 7: Einführung in die Stochastik
- Klassenstufe 8: Pascal-Dreieck
- Hauptphase: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Francis Galton (1822-1911)
- Blaise Pascal (1623-1662)
- John Venn (1834-1923)
- Jakob Bernoulli (1655-1705)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Simulation von (mehrstufigen) Zufallsexperimenten, z. B. mit Tabellenkalkulation
- Erstellen von Baumdiagrammen mit bereichsspezifischer Software

Fakultative Inhalte

- Kontingenztafeln

4. Potenzen und Potenzfunktionen	Mathematik 9

Die integrierende Behandlung von Term, Wertetabelle und Graph schafft Voraussetzungen für ein nachhaltiges Lernen im Unterricht. Diese lernfördernden Bedingungen werden durch die Verfügbarkeit digitaler Werkzeuge und Medien, auch beim Bearbeiten von Hausaufgaben, noch verstärkt. Das sichere Erkennen von Termstrukturen und das Beherrschen grundlegender Umformungstechniken gehören zu den angestrebten Kernkompetenzen.

Ein deutlicher Akzent liegt auf dem Erarbeiten und Festigen von Begriffen (z. B. Funktionseigenschaften) und der Fähigkeit, Regeln und Verfahren inner- und außermathematisch anzuwenden. Etliche der betrachteten Funktionen tragen eine prototypische Modellbildung in sich, wie etwa die Kehrwertfunktion mit ihren Bezügen zur umgekehrten Proportionalität oder die kubische Parabel in Verbindung mit vielen Volumenformeln.

Die Erweiterung der Potenzdefinition auf rationale Exponenten orientiert sich an der Forderung nach der Beibehaltung der Potenzgesetze (Permanenzprinzip). Die in den Bereichen Algebra und Funktionenlehre vermittelten Kenntnisse sind notwendige Voraussetzungen für ein erfolgreiches Arbeiten in der Oberstufe.

Die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ ist in diesem Lernbereich an vielen Stellen mit der Leitidee „Raum und Form“ verwoben.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Terme (Wiederholung) • Gleichwertigkeit von Termen • Termumformungen	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen den Wert eines Terms bei vorgegebener Belegung der Variablen **(K5)** • belegen die Nichtgleichwertigkeit von Termen durch Beispiele **(K1)** • formen Terme durch Anwenden von Rechenregeln gleichwertig um **(K5)** • identifizieren fehlerhafte Termumformungen und beschreiben den Fehler **(K1)**
Potenzen mit natürlichen Exponenten (Wiederholung) • Potenzen – Festsetzung von a^n für natürliche Exponenten – geometrischer Bezug bei den Exponenten 2 und 3 – Vorzeichenregeln bei geradzahligen bzw. ungeradzahligen Exponenten – wissenschaftliche Notation • Rechnen mit Potenzen – Einordnen des Potenzierens in die Prioritätsregeln – Potenzrechenregeln: Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis bzw. bei gleichem Exponenten – Potenzieren von Potenzen	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen in einfachen Fällen die Werte konkreter Potenzen im Kopf **(K5)** • begründen durch Beispiele, dass das Potenzieren weder kommutativ noch assoziativ ist **(K1)** • erläutern die Definition des Wertes der Potenzen mit Exponent 0 und Basis ungleich 0 **(K6)** • bestimmen Flächeninhalte von Quadraten und Volumina von Würfeln in funktionaler Abhängigkeit von Variablen **(K5)** • berechnen Potenzen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel **(K5)** • multiplizieren und dividieren Zahlen in wissenschaftlicher oder technischer Notation, z. B. bei astronomischen Größen **(K5)** • wenden die Potenzrechenregeln in beiden Richtungen an **(K5)** • untersuchen Terme wie $a^n + b^n$ und $(a+b)^n$ bzw. $a^n + a^m$ und a^{m+n} auf Gleichwertigkeit **(K1)**

4. Potenzen und Potenzfunktionen	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Potenzen mit natürlichen Exponenten (Fortsetzung) • Potenzfunktionen mit $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}$ – Klassifizieren nach geradzahligen und ungeradzahligen Exponenten – Graph – $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$ als gemeinsame Punkte – Wertemenge – Symmetrie – (strenge) Monotonie – Krümmungsart (rechts- bzw. linksgekrümmt) • Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt symmetrisch zur y – Achse, wenn – D symmetrisch zu O ist und – für alle $x \in D$ gilt $f(-x) = f(x)$. • Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt symmetrisch zum Ursprung, wenn – D symmetrisch zu O ist und – für alle $x \in D$ gilt $f(-x) = -f(x)$. • Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend im Intervall I $(I \subseteq D)$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$. • Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton fallend im Intervall I $(I \subseteq D)$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$.	Die Schülerinnen und Schüler • erstellen Wertetabellen und zeichnen Graphen der Potenzfunktionen **(K5)** • verdeutlichen den Begriff Wertemenge an Graphen **(K4)** • bestimmen anhand des Exponenten die Quadranten, in denen ein Graph verläuft, und skizzieren den Graphen **(K4)** • begründen, dass Graphen von Potenzfunktionen nie durch den vierten Quadranten verlaufen **(K1)** • ordnen vorgegebene Graphen und Exponenten begründet einander zu **(K2)** • veranschaulichen die Definition der Symmetrien anhand der geometrischen Eigenschaften des Graphen und bestätigen sie algebraisch **(K4)** • ergründen, dass die Symmetrie einer Funktion eine zu 0 symmetrische Definitionsmenge voraussetzt **(K2)** • erläutern die Begriffe Monotonie und Krümmungsart am Graphen **(K6)** • veranschaulichen die Definition der Monotonie geometrisch am Graph **(K4)** • identifizieren Monotonie-intervalle an Graphen **(K4)** • beschreiben Zusammenhänge zwischen Krümmungsart und Steigung qualitativ **(K6)**

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Potenzen mit ganzzahligen Exponenten (Wiederholung) • Potenzen – Festsetzung von a^n für negative ganzzahlige Exponenten – Spezialfall: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ – Kehrbruch als Potenz: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ – wissenschaftliche Notation • Rechnen mit Potenzen – Gültigkeit der Potenzrechenregeln – Quotienten als Produkte – Kehrwertbildung und Potenzieren	Die Schülerinnen und Schüler • multiplizieren und dividieren betragskleine Zahlen in wissenschaftlicher Notation, z. B. bei atomaren Größen **(K3)** • weisen für einen Fall, dass einer der Exponenten negativ ist, die Gültigkeit einer ausgewählten Potenzrechenregel nach **(K1)** • nutzen die Regeln zum Potenzrechnen bei Termumformungen und Termauswertungen **(K5)** • schreiben Quotienten in Produkte um, z. B. $\frac{a}{b} = a \cdot \left(b^{-1}\right) = a \cdot b^{-1}$ **(K1)** • begründen die Vertauschbarkeit von Kehrwertbildung und Potenzieren, z. B. bei $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ **(K1)**
Potenzen mit ganzzahligen Exponenten (Fortsetzung) • Potenzfunktionen mit $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – Klassifizieren nach geradzahligen und ungeradzahligen Exponenten – Graph – $(1 \mid 1)$ als gemeinsamer Punkt – Grundeigenschaften (Wertemenge, Symmetrie, Monotonie, Krümmungsart) • asymptotisches Verhalten • Operationen mit Potenzfunktionen – Funktionen $f : D_{max} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto a \cdot \left(x - x_0\right)^z + d$, $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ • Kehrwertfunktion – Symmetrie des Graphen zur ersten Winkelhalbierenden – umgekehrte Proportionalität	Die Schülerinnen und Schüler • skizzieren die Graphen der Potenzfunktionen **(K4)** • geben die Wertemenge einer Potenzfunktion an **(K4)** • verdeutlichen den Begriff Wertemenge **(K4)** • beschreiben asymptotisches Verhalten (im Unendlichen und an Definitionslücken) im geometrischen Sinne als Anschmiegen an die entsprechenden Geraden **(K6)** • führen Experimente zu Operationen mit Potenzfunktionen mit einem Funktionenplotter durch **(K5)** • übertragen die Operationen von der Quadratfunktion auf die Potenzfunktionen **(K1)** • erläutern den Zusammenhang zwischen umgekehrt proportionaler Funktion und gestreckter Kehrwertfunktion **(K6)**

4. Potenzen und Potenzfunktionen	**Mathematik 9**

Verbindliches Fachwissen

Potenzen mit rationalen Exponenten

- n-te Wurzeln
  - Quadratwurzel, Kubikwurzel
  - Gleichungen der Form $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$
  - Definition der n-ten Wurzel als nicht-negative Lösung für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \geq 2$
  - Existenz und Eindeutigkeit
  - Symbol $\sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \geq 2$
  - Eigenschaften:
    $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $a \in \mathbb{R}_0^+$
    $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$, n geradzahlig
  - Lösungsmenge der Gleichung $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von a und n
- Potenzen
  - Festlegungen:
    $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$
    $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$
- Rechnen mit Potenzen
  - Gültigkeit der Potenzrechenregeln
  - Vertauschbarkeit von Radizieren und Potenzieren:
    $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $a \in \mathbb{R}_0^+$
- Potenzfunktionen mit $x \mapsto x^q$
- $q \in \mathbb{Q}^+$ und $D = \mathbb{R}_0^+$
  bzw. $q \in \mathbb{Q}^-$ und $D = \mathbb{R}^+$
  - Graph
  - gemeinsamer Punkt $(1|1)$
  - Grundeigenschaften (Wertemenge, Monotonie, Krümmungsart)
- Zusammenhang zwischen $x \mapsto x^q$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$

Verbindliche Kompetenzschwerpunkte

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren die Kubikwurzel als Kantenlänge eines Würfels bei vorgegebenem Volumen **(K1)**
- lösen Gleichungen der Form $x^n = a$ graphisch und numerisch **(K5)**
- definieren für $a \in \mathbb{R}_0^+$ die n-te Wurzel von a als nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$ **(K1)**
- identifizieren die Quadratwurzel mit der zweiten Wurzel **(K4)**
- identifizieren die Kubikwurzel mit der dritten Wurzel **(K4)**
- begründen die Existenz und Eindeutigkeit n-ter Wurzeln an den Graphen der geeigneten Potenzfunktionen **(K1)**
- erläutern, dass für $a < 0$ und n ungeradzahlig $-\sqrt[n]{|a|}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x^n = a$ ist **(K1)**
- berechnen Näherungswerte n-ter Wurzeln mit dem Taschenrechner **(K5)**
- schätzen n-te Wurzeln für Radikanden bis 1000 ganzzahlig ab **(K2)**
- schreiben n-te Wurzeln als Potenzen und umgekehrt **(K5)**
- begründen die Festlegungen für Potenzen mit rationalem Exponenten mit Hilfe des Permanenzprinzips **(K1)**
- schreiben die Potenzrechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten in Wurzelschreibweise **(K6)**
- bestimmen Potenzen mit ganzzahliger Basis, rationalem Exponenten und ganzzahligem Wert **(K2)**
- skizzieren die Graphen der Potenzfunktionen **(K4)**
- stellen Potenzfunktionen als Wurzelfunktionen dar **(K4)**
- belegen für konkrete $q \in \mathbb{Q}$, dass $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ die Zuordnung $x \mapsto x^q$ umkehrt **(K1)**
- nennen Paare Funktion-Umkehrfunktion aus dem Bereich der Potenzfunktionen und erläutern den Zusammenhang **(K6)**
- lösen Gleichungen der Form $x^q = r$ **(K5)**

4. Potenzen und Potenzfunktionen	Mathematik 9
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Terme mit Potenzen • Produkt- und Quotiententerme • Zusammenfassen von Produkttermen • Kürzen und Erweitern von Bruchtermen • Bruchterme mit irrationalem Nenner • Summenterme • Ausklammern und Ausmultiplizieren • Produkte von Summen • Mittelwerte – harmonischer Mittelwert zweier Zahlen: $2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$ bzw. $\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}\right)^{-1}$ – Mittelwertungleichungskette für harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittelwert zweier Zahlen – geometrischer Mittelwert dreier Zahlen $\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$ • binomische Terme (Wiederholung) • Polynome – Grad – Koeffizienten – Leitkoeffizient – absolutes Glied • Quotienten von Polynomen – Polynomdivision	Die Schülerinnen und Schüler • formen Terme mit maximal drei Variablen um **(K5)** • überprüfen Termumformungen durch konkrete Einsetzungen **(K1)** • schreiben Produkte als Wurzelterme wie $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{a^3 \cdot b}{8}}$ **(K5)** • formen einfache Bruchterme mit irrationalem Nenner in solche mit rationalem Nenner um, z. B. $\frac{\sqrt[3]{a \cdot b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ **(K5)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben zum harmonischen Mittelwert **(K3)** • deuten den geometrischen Mittelwert dreier Zahlen als Länge der Kante des zu einem Quader volumengleichen Würfels **(K3)** • verwenden den geometrischen Mittelwert im Kontext von Zinseszinsaufgaben **(K3)** • beweisen die Mittelwertungleichungskette **(K1)** • wenden die binomischen Formeln auf geeignete Terme mit Potenzen als Summanden an, wie $(2 \cdot a \cdot b^3 + 3 \cdot b)^2$, $\left(a + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ **(K5)** • dividieren Polynome höchstens vierten Grades durch ein lineares Polynom **(K5)** • machen bei aufgehender Polynomdivision die Probe durch Ausmultiplizieren **(K5)** • entscheiden vorab, ob die Polynomdivision durch einen Linearfaktor aufgeht **(K1)** • überführen Terme der Form $(x^n - a^n):(x-a)$ für konkrete a und für $n \le 4$ in Polynomform **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 4 (Potenzen und Potenzfunktionen)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Zur Überprüfung der Gleichwertigkeit von Termen kann eine Tabellenkalkulation eingesetzt werden.
- Das Permanenzprinzip dient als Leitfaden zur Definition von Potenzen, wenn der Zahlbereich der Exponenten erweitert wird. Im Unterricht genügt es, dies an einem Beispiel ohne umfassende Fallunterscheidungen zu illustrieren.
- Auf die Thematisierung der Unabhängigkeit des Wertes einer Potenz von der Bruchdarstellung des Exponenten sollte verzichtet werden.
- Bei der Beschreibung des Wachstumsverhaltens genügt es, sich auf strenge Monotonie zu beschränken.
- Der Krümmungs- und der Steigungsbegriff werden anschaulich und qualitativ entwickelt.
- Es besteht eine Diskrepanz, wenn ein Taschenrechner z. B. $\sqrt[3]{-8}=-2$ ausgibt, obwohl diese Wurzel mathematisch nicht definiert ist.
- Bei Termbetrachtungen verwende man bevorzugt anwendungsbezogene bzw. weitere nicht zu komplexe Terme, in denen nicht mehr als drei Variablen auftreten sollten.
- Die Bezeichnung Umkehrfunktion wird nur propädeutisch verwendet.
- Die Bildung des harmonischen Mittelwertes kann am Graph der Kehrwertfunktion veranschaulicht werden.
- Mit der Polynomdivision wird ein Verfahren zum Umformen von Differenzenquotienten bereitgestellt.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Recherche zu klassischen Problemen der Antike

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Eigenschaften der natürlichen Zahlen
- Klassenstufe 6: Körper
- Klassenstufe 7: Proportionale Funktionen
- Klassenstufe 8: Definition der Quadratwurzel, Terme
- Lernbereich 2: Quadratfunktion und Operationen mit der Quadratfunktion
- Hauptphase: Umkehrfunktion

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Tonleiter der wohltemperierten Stimmung; Johann Sebastian Bach (1685-1750)
- Terme der relativistischen Mechanik
- Terme der keplerschen Gesetze

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Wertetabellen und Graphen unter Verwendung digitaler Werkzeuge

Fakultative Inhalte

- Eigenschaften des Pascal-Dreiecks (u. a. Zeilensummen)
- Erweiterung der Mittelwertungleichungskette um den quadratischen Mittelwert
- „Heronverfahren“ für die Kubikwurzel
- Definition und Eigenschaften von Potenzen mit reellen Exponenten