Ministerium für
Bildung und Kultur
SAARLAND

Lehrplan

Mathematik

Gymnasium

Klassenstufe 8

- Erprobungsphase -

2015

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufe 8

Der Unterricht in der Klassenstufe 8 verbindet in besonderer Weise Tradition und Innovation. Mit der Behandlung klassischer Themen wie Gleichungssysteme, Viereckslehre, Terme, Flächensätzen und reelle Zahlen sind zentrale Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu vermitteln. Dazu zählen das Formalisieren, das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten wie auch das Mathematisieren und das Erarbeiten von Begriffen.

In methodischer Hinsicht eröffnen sich durch die neue Aufgabenkultur und durch den Einsatz digitaler Werkzeuge, insbesondere dynamischer Geometriesoftware (DGS) neue Zugänge und Übungsmöglichkeiten. Die Verwendung elektronischer Hilfsmittel trägt unter anderem auch der Tatsache Rechnung, dass in einer modernen Industriegesellschaft Routinetätigkeiten an Bedeutung verlieren und heuristischen, experimentellen sowie konzeptionellen Tätigkeiten Platz machen.

Die Modellierung durch Terme, das Erkennen von Termstrukturen, das Beachten der Regeln beim Umformen und das Ausnützen von Kontrollmöglichkeiten müssen im Unterricht thematisiert werden. Es bietet sich an, diesen Lernbereich weitgehend integriert in die anderen Lernbereiche zu unterrichten. Sowohl bei linearen Gleichungssystemen als auch in der Geometrie bietet sich vielfältig Gelegenheit, vom Wechselspiel zwischen algebraischer Beschreibung und geometrischem Kontext zu profitieren.

Lernbereiche der Klassenstufe 8

Lernbereiche Klassenstufe 8	**Mathematik**
1. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Terme der Form $a \cdot x + b \cdot y$ Gleichungen der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ Gleichungssysteme der Form $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \wedge a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$ Lösungsverfahren Anwendungen in Alltag und Technik Hinweise	
2. Haus der Vierecke	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Vierecke Eigenschaften von konvexen Vierecken Gliederung im Haus der Vierecke Quadrate und Quadratwurzeln Flächeninhaltsberechnungen Hinweise	
3. Terme	etwa 30 Prozent der Unterrichtszeit
Terme aufstellen, strukturieren, vergleichen und auswerten Terme umformen Besondere Terme definieren Terme und Formeln Hinweise	
4. Satzgruppe des Pythagoras	etwa 15 Prozent der Unterrichtszeit
Satz des Pythagoras Höhensatz Hinweise	
5. Reelle Zahlen	etwa 15 Prozent der Unterrichtszeit
Irrationale Zahlen Menge der reellen Zahlen Hinweise	

1. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	Mathematik 8

Die linearen Gleichungen stehen in engem Zusammenhang mit den linearen Funktionen aus der Klassenstufe 7. Terme in zwei Variablen, deren Werte eine dritte Größe beschreiben, spielen in vielen Sachzusammenhängen eine Rolle. Lineare Terme stehen in Klassenstufe 8 zunächst im Vordergrund. Graphische Taschenrechner (GTR) eröffnen sowohl im numerischen als auch im graphischen Bereich unterrichtliche Einsatzmöglichkeiten, wobei der Übergang zum PC- Einsatz fließend ist.

Lineare Gleichungssysteme bieten eine hervorragende Möglichkeit, algebraische und graphische Methoden miteinander zu verbinden und eine lokale Problemlösestrategie zu entwickeln.

Angesprochen ist in diesem Lernbereich die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“.

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Terme der Form $a \cdot x + b \cdot y$ • Terme in mehreren Variablen • lineare Terme in zwei Variablen	Die Schülerinnen und Schüler • bezeichnen sinnvolle mathematische Ausdrücke mit Zahlen, Variablen, Rechenzeichen oder Klammern als Terme **(K6)** • erläutern Terme in Berechnungsformeln z. B. für Umfang, Flächeninhalt, Oberflächeninhalt, Volumen, Gesamtkantenlänge als Terme in mehreren Variablen **(K3)** • vereinfachen Terme gemäß den Rechenregeln für rationale Zahlen **(K5)** • unterscheiden nichtlineare und lineare Terme aufgrund ihrer formalen Struktur **(K1)** • modellieren eine geeignete im Kontext gegebene Problemstellung mit Hilfe eines linearen Terms **(K3)** • werten lineare Terme aus **(K5)** • variieren bei linearen Termen den Wert einer Variablen bei konstanten Werten der übrigen Variablen **(K5)** • bringen Nebenbedingungen in lineare Terme ein, z. B. beim Umfang eines Rechtecks, dessen eine Seite drei mal so lang ist wie die andere **(K5)**
Gleichungen der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ • Bezeichnung: lineare Gleichung in den Variablen x und y • Menge der Paare rationaler Zahlen als Grundmenge, Symbol $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ • Bestimmung der Lösungsmenge • Klassifizierung der Lösungsmengen • Darstellung der Lösungsmenge als – Graph einer linearen Funktion – als achsenparallele Gerade • Anwendungsbeispiele aus dem Alltag	Die Schülerinnen und Schüler • prüfen durch Einsetzen, ob ein Zahlenpaar Lösung ist **(K1)** • finden Lösungen durch Probieren und stellen sie als Zahlenpaare dar **(K2)** • lösen eine lineare Gleichung nach x oder nach y auf **(K5)** • führen begründend Äquivalenzumformungen bei linearen Gleichungen durch **(K1)** • stellen Lösungen in Tabellen und als Punkte im Koordinatensystem dar **(K4)** • unterscheiden, in welchen Fällen die Lösungsmenge – leer ist – durch eine Gerade dargestellt wird – gleich der Grundmenge ist **(K1)**

1. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Gleichungen der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ **(Fortsetzung)**	Die Schülerinnen und Schüler • ordnen Graphen und lineare Gleichungen einander begründend zu **(K1)** • fertigen Zeichnungen zu Lösungsmengen linearer Gleichungen auch mit Hilfe eines DGS (auch mit Schieberegler) an **(K5)** • begründen, dass lineare Gleichungen mit $a = 0 \wedge b \neq 0$ bzw. mit $b = 0 \wedge a \neq 0$ durch achsenparallele Geraden dargestellt werden **(K1)** • begründen, dass die Variation von c eine Parallelenschar liefert **(K1)** • begründen, dass äquivalente lineare Gleichungen durch identische Geraden dargestellt werden **(K1)** • modellieren im Kontext gegebene Alltagssituationen mit Hilfe linearer Gleichungen **(K3)**
Gleichungssysteme der Form $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$ $\wedge\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$ • <u>Bezeichnung:</u> Lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Gleichungen in zwei Variablen • Gleichungssystem als UND-Aussageform, Wahrheitswert • Lösungen linearer Gleichungssysteme	Die Schülerinnen und Schüler • prüfen durch Einsetzen, ob ein Zahlenpaar Lösung des LGS ist **(K1)** • erstellen zu einem vorgegebenen Zahlenpaar ein LGS, das genau diese Lösung hat **(K2)** • nennen Beispiele für nichtlineare Gleichungssysteme **(K1)** • begründen, dass ein LGS auch unendlich vielen Lösungen haben kann **(K1)**
Lösungsverfahren • Graphisches Lösen – Schnittmenge von Geraden – Typisierung der Lösungsmenge bei zueinander nichtparallelen, (echt) parallelen und identischen Geraden	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern, dass Lösungen eines LGS durch gemeinsame Punkte von Geraden dargestellt werden können **(K6)** • lösen lineare Gleichungssysteme graphisch • begründen, dass LGS mit genau einer Lösung graphisch durch einander schneidende Geraden dargestellt werden **(K1)** • begründen, dass LGS mit leerer Lösungsmenge graphisch durch echt parallele Geraden dargestellt werden **(K1)**

1. Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Lösungsverfahren (Fortsetzung) • Rechnerisches Lösen – Gleichsetzungsverfahren – Einsetzungsverfahren – Additionsverfahren	Die Schülerinnen und Schüler • setzen einen linearen Term in einen anderen ein und vereinfachen **(K5)** • addieren und subtrahieren lineare Terme und multiplizieren einen linearen Term mit einer Zahl **(K5)** • lösen LGS rechnerisch mit den verschiedenen Verfahren und machen die Probe **(K2)** • notieren bei Äquivalenzumformungen von LGS grundsätzlich beide Teilgleichungen **(K4)** • wählen zu einem gegebenen LGS ein zweckmäßiges Lösungsverfahren **(K2)** • begründen den Einsatz des gewählten Lösungsverfahrens **(K6)** • zeigen an Beispielen, dass LGS mit unendlich vielen Lösungen nicht allgemeingültig sein müssen **(K1)**
Anwendung in Alltag und Technik	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Gleichungssysteme zum Lösen von Alltagsproblemen, z. B. beim Vergleichen von Tarifen **(K3)** • machen bei Anwendungsaufgaben die Probe im Sachzusammenhang **(K3)** • formulieren Anwendungsaufgaben zu vorgegebenen linearen Gleichungssystemen **(K3)**
Die Untersuchung der Lagebeziehungen von Geraden stellt eine Verbindung zur Leitidee „Raum und Form“ dar.	

Hinweise

zu Lernbereich 1 (Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die lineare Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit ganzzahligen Parametern ist genau dann über $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar, wenn $\text{ggT}(a;b)$ ein Teiler von c ist.
- Die lineare Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ ist *allgemeingültig* für $c = 0$ und *unerfüllbar* für $c \neq 0$.
- Für Terme in einer oder mehreren Variablen ist das Symbol $T(x; y; ...)$ gebräuchlich. Bei der Auswertung für konkrete Zahlen bietet die Schreibweise mit Strichpunkt Vorteile.
- Man achte bei Gleichungssystemen auf ein übersichtliches Notationsschema.
- Bei den rechnerischen Lösungsverfahren wird der Umgang mit linearen Termen eingefordert.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Einsatz eines DGS mit Schiebereglern für a, b, c zur graphischen Darstellung der Lösungsmengen der Gleichungen $a \cdot x + b \cdot y = c$

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 6: Aussagen und Aussageformen
- Klassenstufe 6: Terme, Gleichungen, Ungleichungen
- Klassenstufe 7: Lineare Funktionen
- Lernbereich 3: Terme
- Klassenstufe 9: Quadratische Gleichungen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- kontrastierend zu linearen Gleichungen: Linsengleichung, Body-Mass-Index, Energieformeln
- Zusammenhang zwischen optimalem Puls und Lebensalter beim Ausdauersport
- Treffprobleme bei gleichförmigen linearen Bewegungen
- Tarife bei Energieversorgungsunternehmen
- Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesoftware
  (mit der Möglichkeit, Kurven zu impliziten Gleichungen zu plotten)
- Tabellenkalkulation
- numerisches Lösen mit WTR oder GTR

Fakultative Inhalte

- nichtlineare Gleichungen, insbesondere der Form $T(x; y) = c$
- Achsenabschnittsform
- lineare Gleichungssysteme in drei Variablen
- Gauß-Verfahren
- Cramersche Regel
- graphisches Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme in zwei Variablen

2. Haus der Vierecke	**Mathematik 8**
Auf der Entwicklungslinie Dreieck-Viereck-Vieleck lassen sich sowohl viele interessante Analogien als auch zahlreiche kontrastierende Bezüge herstellen. Mathematische Verfahren und Begriffe erhalten so eine wiederholende Anwendung oder müssen gegebenenfalls erweitert werden. Ein Schwerpunkt des Unterrichts sollte auf einer einordnenden Gliederung und auf grundlegenden geometrischen Eigenschaften der Figuren liegen. Damit wird die Leitidee „Raum und Form“ aufgegriffen. Ein weiterer Schwerpunkt ist das Entwickeln von Formeln für Umfang und Flächeninhalt sowie das Umformen und Auflösen dieser Formeln nach bestimmten Variablen. Dies geht mit einem Sinn tragenden Aufbau der Termkompetenz einher. Die Leitideen „Messen“ und „Funktionaler Zusammenhang“ sind dabei gleichermaßen angesprochen.	

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Vierecke • ebene Vierecke als Punktmengen • Bezeichnungen, z. B. – A, B, C, D für die Eckpunkte – a, b, c, d für die Seiten und ihre Längen – α, β, γ, δ für die Innenwinkel und ihre Maße – e, f für die Diagonalen und ihre Längen • Winkelsumme im Viereck • konvexe und nichtkonvexe Vierecke	Die Schülerinnen und Schüler • begründen, dass die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt **(K1)** • unterscheiden die Abfolge der Bezeichnungsweise für Seiten und Winkel im Viereck von der im Dreieck **(K6)** • bezeichnen Vierecke, bei denen alle Innenwinkelmaße kleiner als 180° sind, als konvexe Vierecke **(K6)**
Eigenschaften von konvexen Vierecken • <u>Definition:</u> Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und vier gleich großen Innenwinkeln heißt Quadrat. • <u>Definition:</u> Ein Viereck mit vier gleich großen Innenwinkeln, heißt Rechteck. • <u>Definition:</u> Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten, heißt Raute oder Rhombus. • <u>Definition:</u> Ein Viereck, bei dem einander gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm. • <u>Satz:</u> Für Vierecke sind folgende Aussagen äquivalent: – Die Gegenseiten sind parallel. – Die Gegenseiten sind gleich lang. – Die Gegenwinkel sind maßgleich. – Zwei Seiten sind zueinander parallel und gleich lang. – Die Diagonalen halbieren einander. • Eigenschaften von Seiten, Diagonalen und Winkeln bei Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm • Symmetrien bei Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm	Die Schülerinnen und Schüler • nennen die definierenden Eigenschaften von Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm **(K6)** • zeichnen bzw. skizzieren typische Vertreter der Viereckarten Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm **(K5)** • unterscheiden definierende und resultierende Eigenschaften **(K1)** • begründen, dass im Rechteck die vier Innenwinkel rechte Winkel sind **(K1)** • extrahieren und begründen einzelne Aussagen des angegebenen Satzes oder deren Kontraposition **(K1)** • geben Symmetrieachsen und Symmetriezentren bei Quadrat, Rechteck, Raute und Parallelogramm an **(K6)**

2. Haus der Vierecke — Mathematik 8

Verbindliches Fachwissen

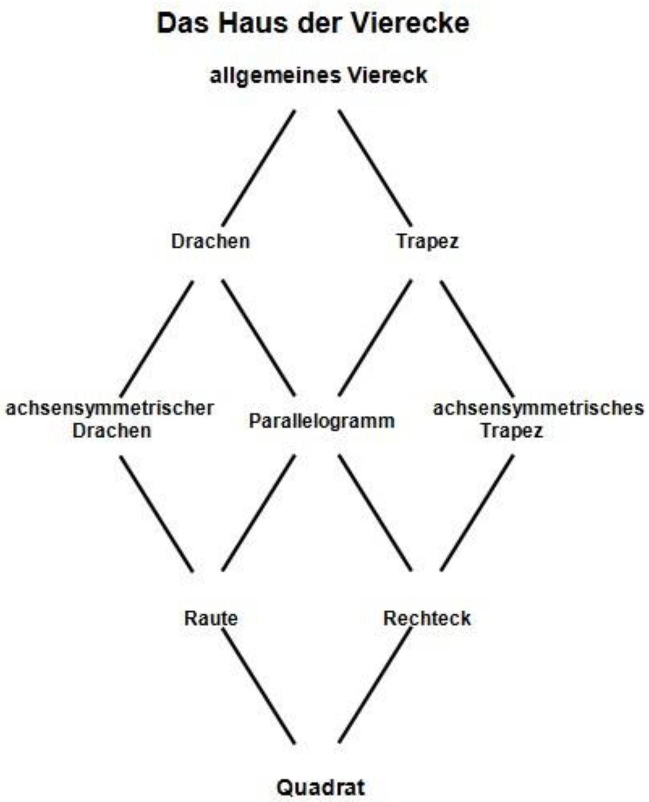
Gliederung im Haus der Vierecke

- Definition: Ein Viereck mit einem Paar paralleler Gegenseiten heißt Trapez.
- Definition: Ein Viereck, bei dem eine Diagonale die zweite halbiert, heißt Drachen
- Bezeichnungen beim Trapez: Grundseiten, Schenkel, Mittenparallele
- Symmetrie bei Drachen und Trapezen
- gleichschenklige Trapeze
- Diagonalen im achsensymmetrischen Trapez und im achsensymmetrischen Drachen

Verbindliche Kompetenzschwerpunkte

Die Schülerinnen und Schüler

- zeichnen bzw. skizzieren typische Vertreter der Viereckarten Trapez und Drachen **(K5)**
- nennen die definierenden Eigenschaften der Viereckarten Trapez und Drachen **(K6)**
- zeichnen Drachen und Trapeze bei ausgewählten vorgegebenen Bestimmungsstücken **(K2)**
- konstruieren ein Trapez, dessen vier Seitenlängen gegeben sind, mit Zirkel und Lineal **(K2)**
- geben die Symmetrieachsen beim achsensymmetrischen Trapez und beim achsensymmetrischen Drachen an **(K6)**
- skizzieren das Haus der Vierecke **(K4)**
- schließen im Haus der Vierecke auf sich vererbende Eigenschaften **(K1)**
- bilden Kehraussagen zu Eigenschaften und prüfen den Wahrheitswert **(K1)**



2. Haus der Vierecke	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Quadrate und Quadratwurzeln • Seitenlängen und Flächeninhalte von Quadraten (Wiederholung) • Definition: Die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = A$ mit $A \geq 0$ heißt Quadratwurzel von A (kurz: Wurzel von A). • Symbol $\sqrt{A}$ • Bezeichnung: Radikand A • Geometrische Interpretation der Quadratwurzel als Maßzahl der Seitenlänge des Quadrats mit dem Flächeninhalt A. • Existenz der Zahl $\sqrt{2}$ • Eindeutigkeit der Quadratwurzel • Heronverfahren • Satz: Für nichtnegative Zahlen u und v gilt $\sqrt{u \cdot v} = \sqrt{u} \cdot \sqrt{v}$. • Diagonalenlänge in Quadraten	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen die Flächeninhalte von Quadraten mit vorgegebener Seitenlänge **(K5)** • nennen zu vorgegebenen Quadratzahlen (mit ganzzahliger Quadratwurzel) bis 625 die jeweilige Quadratwurzel **(K6)** • erläutern die geometrische Interpretation der Quadratwurzel an Beispielen **(K6)** • begründen die Existenz von $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Maßzahl der Diagonalen im Einheitsquadrat **(K1)** • schätzen die Seitenlänge eines Quadrates bei vorgegebenem Flächeninhalt ganzzahlig ab. **(K5)** • bestimmen Näherungswerte für Quadratwurzeln mit dem Taschenrechner **(K5)** • begründen die Eindeutigkeit der nichtnegativen Lösung der Gleichung $x^2 = A$ mit $A \geq 0$ **(K1)** • erstellen zu vorgegebenem Flächeninhalt eines Quadrates Intervalle für die Seitenlänge mit Hilfe von Rechteckfolgen gemäß dem Heronverfahren **(K3)** • stellen die Iterationsformel $b_{n+1} = \frac{b_n + \frac{A}{b_n}}{2}$ für die größere Seitenlänge der Rechtecke beim Heronverfahren auf **(K2)** • implementieren das Heronverfahren in einer Tabellenkalkulation **(K5)** • begründen, dass für nichtnegative Radikanden die Quadratwurzel eines Produkts gleich dem Produkt der Quadratwurzeln ist **(K1)** • zerlegen Radikanden geeignet in Faktoren und ziehen die Quadratwurzel faktorweise **(K5)** • belegen an Beispielen, dass im allgemeinen $\sqrt{u+v} \neq \sqrt{u} + \sqrt{v}$ ist **(K1)** • berechnen die Diagonalenlänge von Quadraten exakt und näherungsweise mit dem Taschenrechner **(K5)**

2. Haus der Vierecke	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Flächeninhaltsberechnungen • Strategien der Flächeninhaltsbestimmung – Rückführen auf den Flächeninhalt von Dreiecken oder Rechtecken – Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit • Satz: Ein Parallelogramm mit einer Grundseite der Länge g und der zugehörigen Höhe der Länge h_g hat den Flächeninhalt A mit $A = g \cdot h_g$. • Satz: Ein achsensymmetrischer Drachen mit Diagonalen der Längen e bzw. f hat den Flächeninhalt A mit $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$. • Satz: Ein Trapez mit Grundseiten der Längen a bzw. c sowie mit der zugehörigen Höhe der Länge h hat eine Mittelparallele m mit der Länge $m = \frac{a+c}{2}$ und den Flächeninhalt A mit $A = m \cdot h$.	Die Schülerinnen und Schüler • leiten die Flächeninhaltsformeln von Parallelogramm, Drachen und Trapez her **(K2)** • deuten die Flächeninhaltsformel für den achsensymmetrischen Drachen geometrisch sowohl ausgehend von einem Rechteck als auch von einem Dreieck **(K1)** • begründen geometrisch, dass in einem Trapez die Länge der Mittelparallele der arithmetische Mittelwert der Längen der beiden Grundseiten ist **(K1)** • übertragen die Flächeninhaltsformeln gemäß der Vererbung im Haus der Vierecke **(K1)** • berechnen Flächeninhalte mit Hilfe von Formeln **(K5)** • lösen Formeln für Flächeninhalte nach einer Streckenlänge auf **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 2 (Haus der Vierecke)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Der Begriff des ebenen Vierecks wird über die intuitive Auffassung hinaus nicht explizit thematisiert. Zur Anreicherung des Beispielvorrates sollen beispielhaft auch nichtkonvexe Vierecke betrachtet werden.
- Die Bezeichnungen für die Eckpunkte und Seiten erfolgen im mathematisch positiven Sinne. Man stelle bei den Seitenbezeichnungen den Unterschied zum Dreieck heraus.
- Zwischen den Seiten und Seitenlängen wird unter Verwendung kleiner lateinischer Buchstaben nicht formal unterschieden. Analoges gilt mit kleinen griechischen Buchstaben für Winkel und Winkelmaße.
- Es empfiehlt sich, die resultierenden Eigenschaften der Vierecke in Wenn-dann-Form zu fassen.
- Die Existenz von (irrationalen) Quadratwurzeln wird aus dem Kontext „Quadrat“ heraus als gegeben angesehen. Das Rechnen mit Quadratwurzeln fußt auf dem Permanenzprinzip.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Herstellen eines Mau-Mau-Kartenspiels zu den Viereckarten und deren Eigenschaften
- Anfertigen eines Posters zum Haus der Vierecke mit Beispielfiguren

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat
- Klassenstufe 6: Symmetrie
- Klassenstufe 7: Winkelsumme im Dreieck
- Lernbereich 3: Terme
- Lernbereich 5: Reelle Zahlen
- Klassenstufe 9: Flächeninhalt des Kreises
- Klassenstufe 11: Integration
- Klassenstufe 12: Betrag des Vektorprodukts

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Kräfteparallelogramm
- Verzerrung von Rechtecken bei Zentralperspektive
- Heron von Alexandria (um 100 n. Chr.)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesoftware (DGS)
- Tabellenkalkulation zum Heronverfahren

Fakultative Inhalte

- Schiefsymmetrie und Konzept der Symmetrie im Haus der Vierecke als ordnendes Merkmal
- Parkettieren der Ebene mit Vierecken
- Flächenschwerpunkt eines Vierecks
- Bestimmung des Flächeninhaltes eines Vierecks über die Koordinaten seiner Eckpunkte
- Seitenmittenparallelogramm eines Vierecks
- Tangentenvierecke
- Sehnenvierecke

3. Terme	Mathematik 8

Die Frage nach dem Umfang der Termkompetenz der Schülerinnen und Schüler ist im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Werkzeuge zu sehen. Im Unterricht sollte das Streben nach einem grundlegendem Verständnis der Termstruktur und dem Erkennen etwaiger Gleichwertigkeit im Vordergrund stehen.

Methodisch sollen Terme sowohl in ihrer rechnerischen Struktur als auch in ihrer anschaulichen und situativen Bedeutung thematisiert werden. Ein ausschließlich kontextfreies und sequentielles Üben formaler Rechentechnik führt in der Regel nicht zu einem fehlerresistenten und dauerhaften Verständnis.

Mit gleicher Intention beschränke man sich bei der Auswahl der Terme auf einfache prototypische Muster mit überschaubarer Anzahl und Platzierung der Variablen. Beim Rechnen mit Bruchtermen sollten Fallunterscheidungen eine untergeordnete Rolle spielen.

Grundlegende Techniken im Umgang mit Termen sollten im Sachzusammenhang erlernt werden (z. B. mit Formeln aus dem Haus der Vierecke). Insoweit können viele in diesem Lernbereich angesprochene Inhalte integriert in andere Lernbereiche unterrichtet werden. In gleicher Weise ergibt sich die Gelegenheit immanent zu wiederholen oder vorzubereiten.

Die Leitideen „Zahl“ und „Funktionaler Zusammenhang“ tragen in diesem Lernbereich die mathematischen Überlegungen.

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Terme aufstellen, strukturieren, vergleichen und auswerten • Terme mit Variablen in Alltagssituationen und sonstigen Kontexten • Auswerten von Termen – Definitionsmenge $\mathbb{D}$ – Prioritätsregeln • Gleichwertigkeit von Termen – Symbol = – Vergleichen von Termen mittels Wertetabellen	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Terme in Kontexten auf, z. B. – Oberflächen- und Volumenterme – Paketschnurterme – Abzählterme geometrischer Muster – Zinsterme – kombinatorische Terme – Terme zu Zahlenrätseln **(K3)** • beschreiben Umfang und Flächeninhalt geometrischer Figuren durch Terme mit geeigneten Variablen **(K3)** • setzen vorgegebene Terme in Bezug zu vorgegebenen Situationen **(K3)** • unterscheiden zwischen dem Term und den Werten des Terms **(K6)** • erstellen Wertetabellen vorgegebener Terme, auch mit digitalem Werkzeug **(K5)** • berechnen die Werte von Termen unter Beachtung der Prioritätsregeln **(K5)** • identifizieren lineare und nichtlineare Abhängigkeiten in Termen **(K4)** • erläutern konkrete Beispiele, bei denen der Wert des Terms sich ver-k^n-facht $(n \in \mathbb{N})$, wenn der Wert der Variablen ver-k-facht wird **(K5)** • ermitteln zu gegebenen Werten von Termen passende Werte der Variablen **(K2)** • bezeichnen zwei Terme als gleichwertig über einer Menge $\mathbb{D}$, wenn bei jeder Einsetzung beide Terme den gleichen Wert annehmen **(K6)** • überprüfen die Gleichwertigkeit von Termen, auch mit Bezug zum Kontext **(K1)** • erläutern das Gleichheitszeichen als Zeichen für Gleichwertigkeit **(K6)**

3. Terme	**Mathematik 8**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Terme aufstellen, strukturieren, vergleichen und auswerten (Fortsetzung) • Mittelwerte – arithmetisch: $\frac{a+b}{2}$ – geometrisch: $\sqrt{a \cdot b}$ – harmonisch: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ bzw. $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ • Identifizieren der Grundstruktur – Summe, Differenz, Produkt, Quotient – Potenz – Prioritätensetzung durch Klammern – Prioritätensetzung durch Bruchstriche	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Mittelwerte in jeweils passenden Kontexten, z. B. – mittlere Länge der Rechteckseiten (beim Heron-Verfahren) – Seitenlänge eines zu einem Rechteck inhaltsgleichen Quadrates – mittlerer Zinssatz bei zwei gleichlangen Zeitintervallen – mittlere Geschwindigkeit über zwei gleichlange Wege – mittlere Geschwindigkeit über zwei gleich lange Zeitabschnitte **(K5)** • beschreiben Terme mit Worten und erstellen Terme an Hand verbaler Beschreibungen, z. B. mit Hilfe von Rechenbäumen **(K6)** • analysieren Terme kontrastierend, z. B. als Summe zweier Produkte im Vergleich zum Produkt zweier Summen **(K6)** • verwenden Klammern und Bruchstriche als Prioritäten setzende Symbole **(K5)** • bestimmen die Definitionsmenge von Bruchtermen mit einer Variablen **(K5)** • veranschaulichen die Formel für das Produkt zweier Summen durch Zerlegung einer Rechteckfläche, z. B. $(a+b)\cdot(x+y+z)$ **(K3)**
Terme umformen • Äquivalenzumformungen von Termen durch Anwenden von Rechenregeln: – ordnen und zusammenfassen – Plus- / Minusklammerregel anwenden – ausklammern – ausmultiplizieren – erweitern und kürzen – gleichnamig machen	Die Schülerinnen und Schüler • bezeichnen Umformungen, die zu gleichwertigen Termen führen, als Äquivalenzumformungen **(K6)** • formen Terme mit Variablen mit Hilfe von Rechenregeln äquivalent um **(K5)** • überprüfen exemplarisch Äquivalenzumformungen durch Einsetzen von Zahlenwerten **(K1)** • klammern in geeigneten Termen insbesondere den Faktor (-1) aus, z. B. $b-a=(-1)\cdot(-b+a)=-(a-b)$ **(K5)** • erläutern die Minusklammerregeln mithilfe des Ausklammerns von (-1) bzw. des Ausmultiplizierens eines Faktors (-1) **(K1)** • machen den Nenner in einfachen Bruchtermen rational, z. B. bei $\frac{3}{\sqrt{a}}$ **(K5)** • addieren Bruchterme mit einer Variablen, z. B. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1-a}$ **(K5)**

3. Terme	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Terme umformen (Fortsetzung) • Potenzen mit Hochzahlen 0 oder 1: – $a^0 := 1$; $(a \neq 0)$ – $a^1 = a$ $(a \in \mathbb{Q})$ • Potenzrechenregeln Bei natürlichen Exponenten und geeigneten Basen gilt: – gleiche Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$, falls $m \geq n$ – gleicher Exponent: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $a^m : b^m = (a : b)^m$ – Potenz der Potenz: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ • Potenzrechenregeln zur Division in Bruchschreibweise • Potenzen von Summen und Differenzen – binomische Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$ – binomische Terme $(a+b)^n$ mit $n \leq 5$ – Pascalsches Dreieck	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern die Problematik einer Wertzuweisung für die Potenz 0^0 mittels Permanenzreihen **(K1)** • begründen zurückführend auf die Definition von a^n die Gültigkeit der Potenzrechenregeln **(K1)** • verbalisieren die Potenzrechenregeln **(K6)** • wenden die Definition von Potenzen in Kontexten an, z. B. beim kombinatorischen Zählen in Baumdiagrammen **(K5)** • belegen an Beispielen, dass es bei Strichrechnung keine analogen Potenzrechenregeln gibt **(K1)** • veranschaulichen die binomischen Formeln geometrisch durch Zerlegungen von Quadraten **(K4)** • nennen die binomischen Formeln **(K6)** • wenden die binomischen Formeln an **(K5)** • ergänzen geeignete quadratische Terme in einer Variablen zu binomischen Termen **(K2)** • entwickeln das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks induktiv durch Ausmultiplizieren binomischer Terme **(K2)** • erstellen das Pascalsche Dreieck bis $n = 5$ **(K5)** • verwenden das Pascalsche Dreieck zum Ausmultiplizieren binomischer Terme **(K5)**
Besondere Terme definieren • <u>Satz:</u> Für den Betrag einer Zahl a gilt $\lvert a \rvert = \begin{cases} a & falls\ a \geq 0 \\ -a & falls\ a < 0 \end{cases}$ (Wiederholung aus Klassenstufe 6). • Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten <u>Definition:</u> Für natürliche Zahlen n und a ungleich 0 wird festgelegt $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. • Potenzen mit Exponent $\frac{1}{2}$ <u>Definition:</u> Für a größer gleich 0 wird festgelegt $a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a}$. • Fakultät $n! := n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$	Die Schülerinnen und Schüler • zeigen an Zahlenbeispielen, dass der Term $-a$ sowohl positive als auch negative Werte oder den Wert 0 annehmen kann **(K1)** • begründen, dass der Betrag eines Terms keinen negativen Wert annimmt **(K1)** • identifizieren das Potenzieren mit Exponent (-1) mit der Kehrwertbildung **(K5)** • begründen die Festlegung von Potenzen mit negativen Exponenten mithilfe des Permanenzprinzips **(K1)** • begründen die Festlegung von Potenzen mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ mithilfe des Permanenzprinzips **(K1)** • nutzen die Potenzschreibweise für Quadratwurzeln bei Termumformungen **(K5)** • berechnen die Anzahl der Möglichkeiten, verschiedene Objekte in konkreten Situationen anzuordnen **(K5)**

3. Terme	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Terme und Formeln • Terme zur Definition oder Beschreibung von Größen • Formeln als Gleichungen • Auflösen von Formeln nach den Variablen • Formeln als funktionale Zusammenhänge	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele für Formeln aus verschiedenen Fachgebieten **(K6)** • nennen Beispiele für deskriptive bzw. normative Formeln **(K1)** • lösen Formeln insbesondere aus der Geometrie und aus der Physik nach den Variablen auf, z. B. $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ und $W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \mathrm{v}^2$ **(K5)** • interpretieren Formeln insbesondere aus der Geometrie und aus der Physik funktional **(K3)** • interpretieren Betragsgleichungen der Form $\lvert x - a \rvert = b$ über den Abstandsbegriff und markieren die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden **(K4)**

Hinweise

zu Lernbereich 3 (Terme)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Es empfiehlt sich, die Terme aus vorangehenden Lernbereichen aufzugreifen.
- Bei Modellierungen ergibt sich die Definitionsmenge der Terme auch aus dem Kontext.
- In Sachzusammenhängen eröffnet die Dimensionsanalyse Kontrollmöglichkeiten.
- Es ist nachhaltig fehlerreduzierend, eine Einsetzprobe nach dem Umformen von Termen zur Gewohnheit zu machen.
- Das Multiplikationszeichen zwischen Zahlen und Variablen bzw. zwischen Variablen untereinander wird je nach Leistungsstand der Klasse ab einem gewissen Zeitpunkt weggelassen.
- Einige Computeralgebrasysteme (CAS) müssen entsprechend konfiguriert werden, um zwischen dem Produkt ab und der Variablen ab zu unterscheiden.
- Die Potenzrechenregeln sollen in beiden Richtungen angewandt werden.
- Eine gemeinsame Behandlung der Potenzrechenregeln fördert eine sichere Anwendung.
- Das Rechnen mit Potenzen mit negativen Exponenten ist den nachfolgenden Klassenstufen vorbehalten.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Bauen eines Körpermodells zur Veranschaulichung von $(a+b)^3$
- Bestimmen der Werte des isoperimetrischen Quotienten $\frac{A}{U^2}$ bei besonderen Figuren
- Erstellen eines Terme-Dominos

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Natürliche Zahlen (Potenzen)
- Klassenstufe 6: Terme, Gleichungen, Ungleichungen
- Lernbereich 1: Terme mit zwei Variablen
- Lernbereich 4: Satzgruppe des Pythagoras
- Klassenstufe 9: Potenzfunktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Blaise Pascal (1623-1662)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Erstellung von Wertetabellen mit Tabellenkalkulation
- Überprüfung von Termumformungen mit Computeralgebrasystemen (CAS)

Fakultative Inhalte

- Terme zu figurierten Zahlen, z. B. Dreieckszahlen
- Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks
  (z. B. Bildungsregeln, Zeilensummen, Folgen figurierter Zahlen)

Nach der Behandlung der Dreieckseigenschaften (Klassenstufe 7) geht es nun um die rechnerischen Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck. In Klassenstufe 8 beschränkt sich die Untersuchung auf Streckenlängen in rechtwinkligen Dreiecken, bevor in Klassenstufe 9 mit Sinus, Kosinus und Tangens beliebige ebene Dreiecke betrachtet werden.

Die hier behandelten Sätze bewähren sich insbesondere bei Berechnungen an Körpern, wo es gilt, zunächst geeignete rechtwinklige Bestimmungsdreiecke zu erkennen.

Die Satzgruppe des Pythagoras verbindet in vielfältiger Weise die Leitideen „Algorithmus und Zahl", „Messen", „Raum und Form" und „Funktionaler Zusammenhang".

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Satz des Pythagoras • Benennung der Seiten im rechtwinkligen Dreieck • <u>Satz des Pythagoras (SdP):</u> Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse. • Kontraposition des Satzes des Pythagoras • <u>Kehrsatz zum Satz des Pythagoras:</u> Wenn die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden kürzeren Seiten eines Dreiecks gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der längsten Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig. • pythagoreische Zahlentripel – natürliche Zahlen a, b, c mit $a^2+b^2=c^2$ – Erstellungsformeln ($m, n \in \mathbb{N}$; $m > n$) $a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$	Die Schülerinnen und Schüler • ordnen die Bezeichnungen Kathete und Hypotenuse den Dreieckseiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu **(K4)** • nennen den SdP **(K6)** • beweisen den SdP **(K1)** • formulieren den SdP an vorgegebenen rechtwinkligen Dreiecken in algebraischer Form **(K4)** • berechnen unbekannte Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken **(K5)** • konstruieren Strecken mit einer Quadratwurzel als Maßzahl ihrer Länge **(K2)** • berechnen Streckenlängen in ebenen Schnitten durch Körper **(K2)** • berechnen den Abstand von Punkten in kartesischen Koordinatensystemen **(K2)** • unterscheiden zwischen Kehrsatz und Kontraposition **(K1)** • verifizieren anhand von Beispielen, dass ein Wenn-dann-Satz und seine Kontraposition stets den gleichen Wahrheitswert haben **(K1)** • geben Beispiele dafür an, dass ein Wenn-dann-Satz wahr und der Kehrsatz falsch sein kann **(K1)** • beweisen den Kehrsatz des SdP **(K1)** • finden pythagoreische Zahlentripel, auch mit Hilfe vorgegebener Formeln **(K2)** • stellen eine Knotenschnur zur Demonstration des Kehrsatzes des SdP her **(K4)** • nutzen den Kehrsatz des SdP zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit von Dreiecken mit gegebenen Seitenlängen **(K1)**

4. Satzgruppe des Pythagoras	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Höhensatz • Höhensatz: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das aus den beiden Hypotenusenabschnitten gebildete Rechteck. • Satz (Orthogonalitätsbedingung): Für zwei nicht achsenparallele Geraden g_1 und g_2 mit den Steigungen m_1 bzw. m_2 gilt: $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$	Die Schülerinnen und Schüler • nennen den Höhensatz **(K6)** • beweisen den Höhensatz **(K1)** • formulieren den Höhensatz an vorgegebenen rechtwinkligen Dreiecken in algebraischer Form **(K4)** • nutzen den Höhensatz, um Streckenlängen zu berechnen, auch in komplexen Figuren **(K2)** • wandeln ein Rechteck mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt um **(K5)** • konstruieren Strecken mit einer Quadratwurzel als Maßzahl ihrer Länge, auch mit Hilfe des Höhensatzes **(K2)** • veranschaulichen im Thaleskreis die Ungleichungskette zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittelwert **(K4)** • begründen die Orthogonalitätsbedingung bei schiefen Geraden im zweidimensionalen Koordinatensystem **(K1)** • überprüfen rechnerisch, ob gegebene schiefe Geraden einander senkrecht schneiden **(K1)**
Anwendung der Sätze • Beispiele: – Strecken an quadratischen Pyramiden – geometrische Konstruktion von Quadratwurzeln, Wurzelspirale – Ganghöhe und Länge von Schraubenlinien – Blickweite von einem Leuchtturm zum Meereshorizont	Die Schülerinnen und Schüler • identifizieren in komplexen Figuren und Körpern rechtwinklige Dreiecke **(K1)** • begründen, ob der SdP oder seinen Kehrsatz anzuwenden ist **(K1)** • vollziehen in ihren Aufgabenbearbeitungen Schritte des Problemlösens explizit: Problemexploration, Vorgehensplanung, Planausführung mit Ergebnis, Formulierung der Lösung **(K2)** • überprüfen ihre Lösungen auf Plausibilität im Sachkontext **(K3)**

Hinweise

zu Lernbereich 4 (Satzgruppe des Pythagoras)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die Auswahl des Beweises des Satzes des Pythagoras bleibt der Lehrkraft überlassen. Die Behandlung mehrerer unterschiedlicher Beweise erhöht die Einsicht in geometrische Zusammenhänge und bietet Gelegenheit zur Binnendifferenzierung.
- Die Sätze der Satzgruppe sollten zunächst als Wenn-dann-Sätze formuliert werden. Danach kann auf verkürzte Formulierungen eingegangen werden. Die Formulierung des Satzes des Pythagoras ist nicht auf die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ zu reduzieren.
- Das Explizieren von Heuristiken unterstützt Lernprozesse. Beim Problemlösen nach George Pólya (1887-1985) sollte besonders darauf geachtet werden, dass im letzten Schritt die Plausibilität der Lösung überprüft wird.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Recherche und Vorstellen alternativer Beweisverfahren zum Satz von Pythagoras
- Suche nach pythagoreischen Zahlentripeln mit der Eigenschaft $c = b + 1$
- Suche nach rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Maßen für a, b, c, p, q, h.
- Herstellen von Knotenseilen; Abstecken rechtwinkliger Dreiecke (z. B. auf dem Schulhof)

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Rechtecke
- Klassenstufe 6: Körper
- Klassenstufe 7: Geometrie
- Lernbereich 2: Haus der Vierecke: Quadrate und Quadratwurzeln
- Lernbereich 5: Reelle Zahlen
- Klassenstufe 9: Sinus, Kosinus, Tangens
- Klassenstufe 10: Stereometrie
- Klassenstufe 12: Analytische Geometrie

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- ägyptische Pyramiden, Baukörper in der Architektur, Dachkonstruktionen
- Pythagoras von Samos (um 580-500 v. Chr.)
- Euklid von Alexandria (um 365-290 v. Chr.)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesoftware
- Tabellenkalkulation zur Listung pythagoreischer Dreiecke

Fakultative Inhalte

- Kathetensatz
- Streckenlängen an Rechteck-Pyramiden und Tetraeder

Ist die mit den rationalen Zahlen erstellte Zahlengerade vollständig belegt? Kann jeder Strecke eine rationale Maßzahl zugeordnet werden? Diese Fragen finden Antworten in zahlentheoretischen Überlegungen. Damit ist man auch beim klassischen Problem der Kommensurabilität einer Strecke mit einer anderen (mit der Einheitsstrecke) angelangt. Die Rolle des Taschenrechners muss im erweiterten Zahlenbereich $\mathbb{R}$ neu überdacht werden.

Die Leitidee „Algorithmus und Zahl“ prägt die Inhalte dieses Lernbereichs. Wichtige Aspekte werden durch die Leitidee „Grenzprozesse und Näherungsverfahren“ erfasst.

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Irrationale Zahlen • rationale Zahlen (Wiederholung aus Klassenstufe 6) – als vorzeichenbehaftete Bruchzahlen – als vorzeichenbehaftete endliche oder periodische Dezimalbrüche – als dicht liegende Punkte auf der Zahlengeraden • Beispiele für irrationale Maßzahlen – Diagonale im Einheitsquadrat – Raumdiagonale im Einheitswürfel – Grenzwert beim Heronverfahren – idealisiertes Seitenverhältnis bei den DIN-Papierformaten • Beweis der Irrationalität von $\sqrt{p}$ für Primzahlen p • Intervallschachtelung – definierende Eigenschaften – Beispiel: Intervallhalbierungsverfahren – Beispiel: dezimale Intervallschachtelung – Beispiel: Heronverfahren als Intervallschachtelung • Darstellung irrationaler Zahlen – mittels Intervallschachtelung – als unendlich nicht periodische Dezimalbrüche • numerische Näherungen durch Taschenrechner	Die Schülerinnen und Schüler • geben Beispiele für rationale Zahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise an **(K4)** • nennen die Bedingungen für endliche bzw. periodische Dezimaldarstellungen von Brüchen **(K6)** • konstruieren und markieren auf der Zahlengeraden die zu gegebenen rationalen Zahlen gehörenden Punkte **(K5)** • begründen, dass die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden dicht liegen **(K1)** • deuten das Heronverfahren als Bildung einer Folge von Intervallen **(K4)** • konstruieren mithilfe des Heronverfahrens eine Intervallschachtelung für eine vorgegebene Quadratwurzel unter Voraussetzung ihrer Existenz **(K5)** • führen einen indirekten Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ und erläutern damit das Verfahren des Beweises durch Widerspruch • finden Dezimaldarstellungen irrationaler Zahlen durch das Intervallhalbierungsverfahren und mittels dezimaler Intervallschachtelung **(K5)** • erzeugen und beschreiben Beispiele für Dezimaldarstellungen irrationaler Zahlen **(K6)** • konstruieren Strecken mit irrationalen Längen **(K5)** • nennen die Kreiszahl π als Beispiel für eine irrationale Zahl, die keine Wurzel einer rationalen Zahl ist **(K6)** • erläutern die Vorschrift für das Herstellen von DIN-Papierformaten **(K6)** • begründen, dass die DIN-Papierformate im mathematischen Modell das feste Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ aufweisen **(K1)** • bestimmen Näherungswerte für irrationale Zahlen passend zum Kontext **(K5)**

5. Reelle Zahlen	Mathematik 8
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Menge der reellen Zahlen • Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen • Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen • Einbettung der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ • Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bezüglich Intervallschachtelungen (ohne Beweis) • Rechenregeln gemäß Permanenzprinzip • Besondere Terme mit reellen Zahlen – Summe reeller Zahlen – Produkt reeller Zahlen – teilweises Radizieren (Wiederholung) – Quotient zweier Quadratwurzeln	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern den Begriff „reelle Zahl“ **(K6)** • weisen gegebene Zahlen den Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zu und umgekehrt **(K1)** • erstellen das Venn-Diagramm zu den Zahlenmengen **(K4)** • beschreiben anschaulich die Vollständigkeit der reellen Zahlen **(K6)** • wenden beim Umformen von Rechenausdrücken mit reellen Zahlen die Rechenregeln an **(K5)** • beweisen, dass die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl irrational ist **(K1)** • nennen Beispiele für Summen irrationaler Zahlen, die rationale Werte haben **(K1)** • untersuchen Produkte aus rationalen und irrationalen Zahlen auf Irrationalität **(K2)** • vereinfachen Terme mit Quadratwurzeln **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 5 (Reelle Zahlen)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die Wiederholung der Eigenschaften der rationalen Zahlen sollte in der gebotenen Kürze erfolgen.
- Die Unvollständigkeit der rationalen Zahlen bezüglich der Umkehrung des Quadrierens ist als Ausgangspunkt für die erneute Erweiterung des Zahlenbereichs hervorzuheben.
- Auf das Rechnen mit Intervallschachtelungen sollte verzichtet werden.
- Die einzelnen Schritte des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$ müssen mit besonderer Sorgfalt erarbeitet werden.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Erstellen einer Mindmap zum Thema rationale Zahlen
- Erforschen numerischer Ungenauigkeiten

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen
- Klassenstufe 6: Rationale Zahlen
- Lernbereich 2: Haus der Vierecke (mit Quadraten und Quadratwurzeln)
- Klassenstufe 9: Ähnlichkeit
- Klassenstufe 10: Grenzwertbegriff
- Klassenstufe 12: Eulersche Zahl e

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Geschichte der irrationalen Zahlen, Entdeckung der Irrationalität
- Irrationalität und Philosophie
- Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.)
- Heron von Alexandria (um 100 n. Chr.)
- Georg Cantor (1845-1918)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Tabellenkalkulation zur Anwendung des Heronverfahrens
- Aufsuchen von Geburtsdaten als Ziffernfolgen in der Dezimaldarstellung von π mit Hilfe von Programmen aus dem Internet

Fakultative Inhalte

- Abzählbarkeit der rationalen Zahlen (Erstes Cantorsches Diagonalisierungsverfahren)
- Überabzählbarkeit der reellen Zahlen (Zweites Cantorsches Diagonalisierungsverfahren)
- Beweis, dass $\sqrt{a}$ irrational ist, wenn a nicht Quadrat einer rationalen Zahl ist
- Goldener Schnitt
- Inkommensurabilität am regelmäßigen Fünfeck