Ministerium für
Bildung und Kultur
SAARLAND

Handreichung

Mathematik

zum Übergang
vom Mittleren Bildungsabschluss (MBA)
in die Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe (GOS)

2016

Adressaten und Anliegen der Handreichung

Beim Übergang aus nichtgymnasialen Schulformen in die Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe stehen unter anderem mathematische Inhalte und Kompetenzziele zur unterrichtlichen Behandlung an, die bereits in vorausgehenden Klassenstufen Gegenstand nichtgymnasialer Lehrpläne waren. Entscheidend ist, in welcher Tiefe bestimmte Inhalte bereits in den vorangegangenen Klassenstufen anderer Schulformen behandelt wurden und welche Schwerpunkte dort gesetzt wurden.

Adressaten dieser Handreichung sind Fachlehrer/innen Mathematik, die in der Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe unterrichten und

- an einem Gymnasium Schüler/innen unterrichten, die die Klassenstufe 10 an einer Gemeinschaftsschule bereits durchlaufen haben,
- an einem beruflichen oder einem reinen Oberstufengymnasium unterrichten,
- in der Oberstufe von Gemeinschaftsschulen unterrichten,
- Fachleiterinnen und Fachleiter Mathematik, insbesondere für die Sekundarstufe II sind.

Auch sollen Lehrerinnen und Lehrer angesprochen werden, die bisher nicht oder nur selten in der Mittelstufe unterrichtet haben.

In Übergängen wie der Einführungsphase zur GOS gilt es, einerseits bereits vorhandenes Wissen und vorhandene Kompetenzen zu aktivieren und andererseits im Sinne einer vertiefenden gymnasialen Bildung erweiterte Grundlagen zu schaffen. Die Ausrichtung des Unterrichts darf sich dabei nicht auf einen Abgleich der mathematischen Inhalte beschränken, sondern muss u. a. Unterrichtsmethoden, fachliche Arbeitsmethoden, Abstraktionsniveau, Fachsystematik und fachliche Begriffsbildung in diesen einbeziehen.

Unter den vorgenannten Aspekten kann diese Handreichung durchaus auch Lehrpersonen, die in den Klassenstufen 9 und 10 an Gemeinschaftsschulen in abiturvorbereitenden Lerngruppen unterrichten, Anregungen für das Wesen unterrichtlicher Vertiefungen und damit u. a. für mögliche aktuelle und zukünftige Schwerpunkte im Unterricht geben.

Insbesondere will die Handreichung aufzeigen, wo genau die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen den Lehrplänen der Gemeinschaftsschule und der Einführungsphase der GOS bei den sich doppelnden Themengebieten Sinusfunktion, Stereometrie und Exponentialfunktionen liegen, um somit Raum und Zeit für eine vertiefende wiederholende Behandlung von anderen Themen aus der Sekundarstufe I zu schaffen.

Grundlegende fachdidaktische Aspekte der Handreichung

Die Handreichung greift folgende Aspekte von Unterrichtsplanung und -durchführung an geeigneten Stellen des Lehrplans mehr oder weniger exemplarisch auf:

- Abstraktionsniveau der unterrichtlichen Behandlung
- Vernetzung in der Fachsystematik und Begrifflichkeit
- Präzisionsgrad und Formalisierungsgrad der Fachsprache
- Arbeitsmethoden und Denkweisen des Faches
- Verwendung von Operatoren in den Aufgabenstellungen
- Aufgabenformate, kanonische Aufgabentypen
- Reflexion von Anwendungsaufgaben im Modellbildungskreislauf
- Verwendung digitaler Werkzeuge
- Umgang mit der geänderten sozialen Bezugsnorm

Aufbau der Handreichung

Die Handreichung folgt dem Aufbau des zugrundeliegenden Lehrplans. Sie behandelt jedoch lediglich die Lernbereiche Allgemeine Sinusfunktion, Stereometrie und Exponentialfunktion, weil diese Lernbereiche bereits Inhalte und Kompetenzziele der Sekundarstufe I an den Gemeinschaftsschulen enthalten. Dies ist in den anderen Lernbereichen der Einführungsphase nicht der Fall.

Zur Orientierung sind in diesen drei Lernbereichen all diejenigen Inhalte und Kompetenzschwerpunkte mit einer Markierung (ausgefüllter Kreis) versehen, die zum Kanon des Lehrplanes 9/10 der Gemeinschaftsschule zählen. Neue Inhalte und Kompetenzschwerpunkte sind mit einem unausgefüllten Kreis gekennzeichnet. Diese Markierungen sollen noch einmal deutlich machen, inwieweit durch eine verkürzte Behandlung von Inhalten und Kompetenzzielen Freiräume für anderweitige Wiederholungen und Vertiefungen geschaffen werden können. Orientierung ist hierbei der Lehrplan für den E-Kurs der Klassenstufen 9 und 10 an Gemeinschaftsschulen, weil aus diesem prinzipiell bei entsprechenden Kurskombinationen ein Übergang in die Oberstufe möglich ist.

Den einzelnen Lernbereichen ist überblicksartig vorangestellt, worin die Schwerpunkte in der Gemeinschaftsschule liegen und welche Kompetenzen in den Bereichen fokussiert werden.

Ergänzt wird die Handreichung durch eine Sammlung von Aufgaben in den verschiedenen Lernbereichen. Ziel dieser Aufgabensammlung ist es, für die übergangsrelevanten Unterschiede zu sensibilisieren und typische Aufgabenstellungen aufzuzeigen, die diese Unterschiede thematisieren. Den Aufgaben zum jeweiligen Lernbereich ist eine kurze Erläuterung über den fachdidaktischen Hintergrund beigegeben. Zu den einzelnen Aufgaben, die in der linken Spalte aufgeführt sind, findet sich begleitend in der rechten Spalte eine stichwortartige Kommentierung zu fachlichen, didaktischen und methodischen Aspekten.

Inhaltlicher Rahmen der Handreichung

Die Handreichung bezieht sich auf die ersten drei Lernbereiche des Lehrplans der Einführungsphase der Gymnasialen Oberstufe. Hier die entsprechende Übersicht der mathematischen Inhalte.

Lernbereiche
Allgemeine Sinusfunktion
Periodizität Sinusfunktion Operationen mit der Sinusfunktion Hinweise
Stereometrie
Prisma und Zylinder Pyramide und Kegel Das Prinzip von Cavalieri Halbkugel und Kugel Hinweise
Exponentialfunktionen
Exponentielles Wachstum Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot b^x$ Logarithmen und Logarithmengesetze Hinweise

Die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe bringt die Funktionenlehre und die klassische Geometrie der Sekundarstufe I zu einem vorläufigen Abschluss. Die Lerninhalte der Einführungsphase kommen in zahlreichen Berufsfeldern zum Tragen. Die Sinusfunktion als Grundmodell periodischer Vorgänge, die Stereometrie als Modellierung für Körper des Anschauungsraumes und schließlich die mathematische Beschreibung von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen ermöglichen vielfältige Alltagsbezüge. Diese legen nahe, im Unterricht den Modellbildungskreislauf mit Modellieren/Mathematisieren – Deduzieren/ Kalkulieren – Interpretieren – Validieren zu vermitteln. Dadurch wird nicht zuletzt die Reflexion des mathematischen Tuns gestützt.

Die in den Bildungsstandards[1] beschriebenen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind im Lehrplan und in dieser Handreichung berücksichtigt.

[1] „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003
„Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife“
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012

Kompetenzschema der Handreichung

Die mathematischen Inhalte des Unterrichts korrespondieren einerseits mit den eingesetzten unterrichtlichen Methoden und andererseits mit den angestrebten Kompetenzen der Lernenden. Dabei wird der fachspezifische Anspruch der Bildungsstandards im Fach Mathematik durch das folgende Kompetenzschema abgebildet, auf das der Lehrplan und die Handreichungen Bezug nehmen.

inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen)	**prozessbezogene mathematische Kompetenzen (allg. math. Kompetenzen)**	**Anforderungsbereiche**
L1 Algorithmus und Zahl	K1 Mathematisch argumentieren	A1 Reproduzieren
L2 Messen	K2 Probleme mathematisch lösen	A2 Zusammenhänge herstellen
L3 Raum und Form	K3 Mathematisch modellieren	A3 Verallgemeinern und Reflektieren
L4 Funktionaler Zusammenhang	K4 Mathematische Darstellungen verwenden	
L5 Daten und Zufall	K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	
L6 Grenzprozesse und Näherungsverfahren	K6 Mathematisch kommunizieren	

Bei einer zielgerichteten und an der Nachhaltigkeit des Gelernten orientierten Unterrichtsgestaltung durchzieht der ständige Abgleich mit den Kompetenzen alle Fachgebiete der Sekundarstufe I (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Funktionenlehre und Stochastik) und wird auch in der Sekundarstufe II (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik) weitergeführt. In der Sekundarstufe II bilden die „Allgemeinen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ den Rahmen, in den sich die Unterrichtsgegenstände und das Anforderungsprofil einfügen.

Die vorliegende Handreichung gibt – in Ergänzung des Lehrplans für die Einführungsphase in die gymnasiale Oberstufe – in den Vortexten zu den einzelnen Lernbereichen, den Einleitungen zu den Lernabschnitten und in den Bemerkungen zu den Beispielaufgaben Hinweise, wie das bereits nichtgymnasial erworbene Fachwissen kompetenzbezogen wiederholt und/oder vertieft werden kann. Unter diesem Aspekt sind auch die aufgeführten exemplarischen Aufgaben einzuordnen.

Einführende Bemerkungen zum Lernbereich

Der aus der Dreieckslehre als Quotient von Seitenlängen eingeführten Sinus wird nun funktional betrachtet und dabei begrifflich erweitert. Das Spektrum der Eigenschaften von Funktionen wird über die Behandlung der Sinusfunktion um die Begriffe „Periode“ und „Amplitude“ erweitert. Änderungen in der Periode bei sonst gleichartigem Verlauf des Funktionsgraphen entsprechen einer Streckung des Graphen in x-Richtung, was andererseits mit der Struktur des Funktionsterms korrespondiert.

Mit den neuen Begriffen bietet der Mathematikunterricht eine erste Grundlage zur Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik. Der naturwissenschaftliche Unterricht der Hauptphase kann entsprechend seiner fachspezifischen Erfordernisse das Thema weiterführen. Demgemäß wird in der Einführungsphase auf das Lösen aufwändiger trigonometrischer Gleichungen verzichtet.

Hinweise über verfügbare Inhalte und Fähigkeiten

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) kennen die Darstellung von Funktionen einerseits als Festlegung von Definitionsmenge und Zuordnungsvorschrift bzw. Funktionsterm und andererseits als Wertetabellen und Funktionsgraphen. Regelmäßig betrachtete Funktionseigenschaften sind Nullstellen und y-Achsenabschnitt sowie die anschaulich geprägten Eigenschaften (einfache) Symmetrie, Monotonie und Krümmung. Bei der Symmetrie sind zusätzlich die charakterisierenden Gleichungen $f(-x) = f(x)$ bei der Symmetrie zur y-Achse bzw. $f(-x) = -f(x)$ bei der Symmetrie zum Ursprung als Allaussagen über der Definitionsmenge bekannt.

An Graphen können zu vorgegebenen Bildwerten y zugehörige Urbildwerte x entnommen werden, wobei die Eindeutigkeit einer solchen Zuordnung mitreflektiert wird. Rechnerisch werden solche Überlegungen an den Graphen der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten n beherrscht - n-te Wurzeln werden bei nichttrivialen Zahlenwerten mit dem Taschenrechner bestimmt.

Die Graphen der quadratischen Funktionen in den Darstellungen $y = x^2 + b \cdot x + c$ [2] und $y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$ werden samt Einfluss der Parameter erschlossen und klassifiziert. Analog erfolgt die Herangehensweise an die Graphen $y = a \cdot \sin x$ bzw. $y = a \cdot \sin(x)$ und weitergehend an $y = a \cdot \sin(b \cdot x)$. Die SuS kennen und nutzen demgemäß den Begriff Parameter (als Formvariable im wörtlichen Sinne) und den Begriff Funktionsvariable.

Das Ausklammern von gemeinsamen Faktoren aus zweigliedrigen Summen- bzw. Differenzentermen wird ebenso wie das Ausmultiplizieren beherrscht. Einfache Bruchgleichungen wie etwa $\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^0}$ werden nach den auftretenden Variablen sicher aufgelöst.

Erweiterung der Inhalte der Lehrpläne zum Mittleren Bildungsabschluss

Eine Erweiterung der Inhalte im Vergleich mit den Lehrplänen der Klassenstufe 10 der GemS bzw. der auslaufenden GeS und ERS ist in diesem Lernbereich graduell erforderlich. Dies betrifft den Darstellungswechsel von der Normalform in die Scheitelpunktform bei gestreckten bzw. gestauchten Parabeln und die Verschiebungen des Graphen in *x*- und *y*-Richtung bei der Sinusfunktion. Beides ist nur im Lehrplan des A-Kurses enthalten. Der Lehrplan der gymnasialen Einführungsphase zeigt jedoch viele Inhalte unter neuer kompetenzorientierter Sichtweise. Die Kosinusfunktion wird bei der Behandlung der Transformationen subsumiert.

[2] Im A-Kurs wird auch in der Normalform der Leitkoeffizient als Parameter *a* variabel gesetzt.

Erläuterungen zu den Kompetenzschwerpunkten

Der Übergang vom Sinus-Quotienten am rechtwinkligen Dreieck zur Sinusfunktion geschieht klassisch am Einheitskreis. Hierzu wird das Winkelmaß über den Vollwinkel hinaus und in den negativen Bereich hinein erweitert. Im Sinne einer Verträglichkeit des Arguments der Sinusfunktion mit den Argumenten bislang behandelter Funktionen wird dem Gradmaß nunmehr das Bogenmaß beigestellt. Derartige, mehrere Lernbereiche und Schuljahre verbindende Entwicklungslinien werden zunehmend in das Bewusstsein der SuS gerückt.

Die Vernetzung von Term und Graph – bei den quadratischen Funktionen vormals eingeübt – wird nunmehr modifiziert und um neue Charakteristika angereichert. Die Fachsprache fordert verstärkt das Leseverstehen bzw. das Dekodieren formal gegebener Informationen ein. Umgekehrt sind die SuS gefordert, die Fachsprache und die Formelsprache aktiv in zunehmender Komplexität zu verwenden.

Definitionen erhalten als zentrale Elemente mathematischer Kommunikation und Deduktion jenseits des bloßen Umgangs mit ihnen eine größere Gewichtung.

Anwendungsaufgaben können in der Einführungsphase bewusst vor dem Hintergrund des Modellbildungskreislaufs bearbeitet werden. Dies steht exemplarisch für den sukzessiven Aufbau einer Metaebene zum schulischen bzw. mathematischen Kontext.

Auf der Handlungsebene treten kognitive und metakognitive Strategien immer häufiger neben gewohnte Algorithmen und Kalküle. Routinen in der Handhabung digitaler Werkzeuge (z. B. Schiebregler, Zweifenstertechnik) werden fortgeführt – etwa bei einer digitalen Sinusuhr.

Hinweise zum Lernabschnitt „Periodizität“

Ziel des Lernabschnitts ist es, Periodizität als mögliche Eigenschaft örtlicher Anordnungen oder/und zeitlicher Abläufe zu abstrahieren und parallel hierzu die Periodizität zu formalisieren und zu visualisieren.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Periodizität • periodische Vorgänge im Alltag – zeitlich – räumlich o periodische Funktionen o <u>Definition:</u> Die kleinste positive Zahl p mit der Eigenschaft $f(x+p)=f(x)$ für alle $x \in D$ heißt Periode. o periodische Bewegung auf einem Kreis	Die Schülerinnen und Schüler • nennen periodische Vorgängen aus der Alltagswelt und geben jeweils die Periodendauer bzw. die Periodenlänge an **(K6)** • entnehmen aus graphischen Darstellungen die Periode **(K4)** o entwickeln Graphen periodischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften **(K4)** o erläutern anhand von Beispielen, unter welchen Bedingungen die Bewegung auf einem Kreis ein periodischer Vorgang ist **(K1)**

Hinweise zum Lernabschnitt „Sinusfunktion“

Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht der Übergang vom Einheitskreis zur Sinuskurve. Geometrische Symmetrien am Einheitskreis korrespondieren mit Gleichheiten von Sinustermen. Der Einheitskreis veranschaulicht auch die Periodizität sowie die Wertemenge (samt der Amplitude) der Sinusfunktion.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Sinusfunktion • Erweiterung des Winkelbegriffs auf Winkelmaße größer 360° und kleiner 0° ○ <u>Definition:</u> Die Maßzahl der zu einem Mittelpunktswinkel gehörigen orientierten Bogenlänge am Einheitskreis heißt Bogenmaß des Winkels. ○ fiktive Einheit Radiant (rad) des Bogenmaßes ○ Verhältnisgleichung $\frac{x}{2\pi} = \frac{\varphi}{360°}$ mit Gradmaß φ und Bogenmaß x • Erweiterung der Definition von $\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(x)$ auf alle Winkelwerte • <u>Definition:</u> Die Funktion $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \sin(x)$ heißt Sinusfunktion, ihr Graph heißt Sinuskurve. • Eigenschaften – Definitionsmenge $\mathbb{R}$ – Wertemenge $[-1;1]$ – Periode 2π – Nullstellen $k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ – Amplitude 1 – Symmetrie – Extremstellen – Graph • Sinusgleichungen der Form $\sin(x) = u$	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Winkelmaße größer 360°, um das mehrfache Durchlaufen eines Kreises zu beschreiben **(K4)** ○ nennen das Bogenmaß besonderer Winkel als Bruchteile bzw. Vielfache von π (-180°, 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°, 540°) **(K6)** ○ rechnen Winkelmaße vom Grad- ins Bogenmaß um und umgekehrt **(K5)** ○ berechnen Kreisbogenlängen als Produkt aus Radius und Bogenmaß **(K5)** ○ bestimmen Werte der Sinusfunktion durch Projektion von Punkten des Einheitskreises auf die y-Achse **(K4)** • erstellen eine Wertetabelle zur Sinusfunktion mit dem Taschenrechner **(K5)** ○ begründen am Einheitskreis die Eigenschaften der Sinusfunktion **(K1)** • begründen den Zusammenhang $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ **(K1)** ○ identifizieren die Punktsymmetrie zum Ursprung mit der Allgemeingültigkeit der Gleichung $\sin(-x) = -\sin(x)$ **(K4)** ○ nennen die besonderen Werte der Sinusfunktion für 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π und nutzen sie beim Lösen von Sinusgleichungen **(K6)** • skizzieren den Graphen der Sinusfunktion über mehrere Perioden unter Berücksichtigung charakteristischer Eigenschaften **(K5)** • bestimmen mit Hilfe graphischer Darstellungen Näherungslösungen von Sinusgleichungen in $\mathbb{R}$ **(K4)** • bestimmen mit dem Taschenrechner eine Näherungslösung einer Sinusgleichung und geben weitere in $\mathbb{R}$ an **(K5)**

Hinweise zum Lernabschnitt „Operationen mit der Sinusfunktion“

Ein wesentlicher Abstraktionsschritt der SuS liegt darin, die Analogie zwischen dem voran gestellten Funktionsbezeichner sin() mit dem bekannten nachgestellten Quadratoperator ()² zu erkennen und entsprechend in Streckungen und Parallelverschiebungen zu verwerten. Da die Streckung in x-Richtung nunmehr neu bei der Sinuskurve eingeführt wird, bietet es sich an, diese Transformation bei der Normalparabel rückblickend analog anzuwenden. Bei der Abfolge mehrerer Transformationen zeigen Beispiele die Bedeutung der Reihenfolge bei Transformationen in der gleichen Achsenrichtung.

Ein gutes Übungsfeld ist, die Graphen von Sinusfunktion (und Kosinusfunktion) an den Achsen des Koordinatensystems zu spiegeln oder um halbe oder viertel Periodenlängen in x-Richtung zu verschieben und dabei Termidentitäten zu erkennen.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Operationen mit der Sinusfunktion • Streckung in y -Richtung – $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto a\cdot\sin(x)\ ,\ a\in\mathbb{R}^*$ – Streckfaktor a in y -Richtung – Amplitude $\lvert a\rvert$ • Parallelverschiebung in y -Richtung – $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \sin(x)+d\ ,\ d\in\mathbb{R}$ – y -Achsenabschnitt d • Streckung in x -Richtung: – $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \sin(b\cdot x)\ ,\ b\in\mathbb{R}^+$ – Streckfaktor $\frac{1}{b}$ in x -Richtung – Periode $p=\frac{2\pi}{b}$ • Parallelverschiebung in x -Richtung – $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \sin(x-x_0)\ ,\ x_0\in\mathbb{R}$ – Nullstelle x_0 • Allgemeine Sinusfunktion $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto a\cdot\sin(b\cdot(x-x_0))+d$ ○ Sinusgleichungen der Form $a\cdot\sin(b\cdot x)=u$ – graphisches Lösen – rechnerisches Lösen (mit dem WTR) – Periodizität der Lösungen ○ Kosinusfunktion – $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto\cos(x)$ – $\cos(x)\ =\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die jeweilige Auswirkung der Variation der Parameter a, d, b und x_0 auf den Graphen der Sinusfunktion **(K6)** • zeichnen die Funktionsgraphen von Hand und mithilfe eines Funktionenplotters **(K4)** ○ erstellen Graphen anhand verbal vorgegebener Eigenschaften oder Vorgaben zur Entstehung **(K3)** ○ führen eine Streckung in y -Richtung mit negativen Streckfaktor a aus, indem sie zunächst an der x -Achse spiegeln **(K5)** ○ berechnen aus der Periode p den zugehörigen Parameter b und umgekehrt **(K5)** ○ lesen die Parameterwerte bei den einzelnen Variationen sowie bei Kombinationen der Variationen am Graphen ab und geben die Funktionsterme an **(K2)** ○ zeichnen ausgehend von den Parameterwerten den Graph zu einem gegebenen Funktionsterm **(K4)** ○ ordnen Graphen und Funktionsterme begründet einander zu **(K1)** ○ bestimmen mit Hilfe graphischer Darstellungen Näherungslösungen von Sinusgleichungen in $\mathbb{R}$ **(K4)** ○ bestimmen mit dem Taschenrechner eine Näherungslösung einer Sinusgleichung und geben weitere in $\mathbb{R}$ an **(K5)** ○ identifizieren den Graph der Kosinusfunktion als eine um $\frac{\pi}{2}$ in negativer x -Richtung verschobene Sinuskurve **(K2)** ○ bestimmen besondere Werte der Kosinusfunktion anhand der entsprechenden Werte der Sinusfunktion **(K5)** ○ zeichnen den Graph der Kosinusfunktion unter Berücksichtigung charakteristischer Eigenschaften **(K4)**

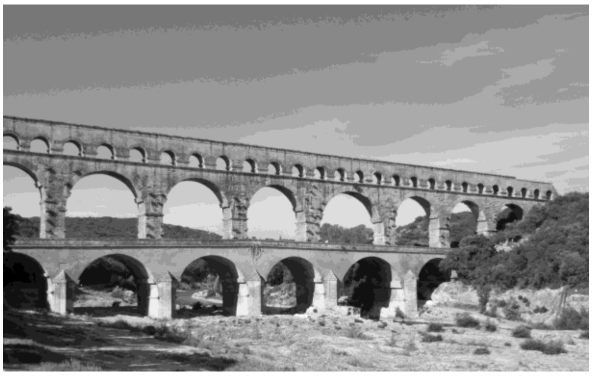
Exemplarische Aufgaben

Vorbemerkungen zu den Aufgaben

Die Aufgaben vertiefen die neu behandelten Funktionseigenschaften sowohl alltagsbezogenen als auch formal. Dabei werden die Funktionen durch Gleichungen, Tabellen und Graphen angesprochen. Die eingeforderten Tätigkeiten der SuS sind verständnisorientiert und weisen über ein bloßes Termumformen hinaus.

Aufgabe 1

Caroline hat im Internet mithilfe der Schlüsselwörter „Perioden, Architektur“ nach Bildern recherchiert und ist auf das folgende Foto gestoßen.



a) Was ist unter einer Architekturperiode zu verstehen?
Welches berühmte Bauwerk zeigt das Foto?

b) Erläutern Sie, welche räumlichen „Perioden“ auf diesem Bild erkennbar sind.

c) Die Gleichung $f(x+p)=f(x)$ beschreibt mathematisch allgemein die Periodizität.

Geben Sie mit Bezugnahme auf die abgebildete Situation an, wofür hier jeweils die Variablen x, p und f bzw. $f(x)$ stehen könnten.

Kommentar zur Aufgabe

fachlich:

- Formalisierung von Sachverhalten
- Alltagsbegriff und Fachbegriff „Periode“
- räumliche Periodizität
- Kommunikation über Formeln

didaktisch:

- Aspekte des Modellbildungskreislaufs

methodisch:

- Motivation der SuS durch eine reale Situation
- Einbindung und Ertüchtigung von Alltagswissen
- Anregung zu eigenen Recherchen

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 2

Das Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie hat im Internet folgende Tabelle veröffentlicht.

Vorausberechnung der astronomischen Gezeit

Pegelort: Hamburg, St. Pauli
Position: 53°32'44''N 9°58'12''E
Zeitangabe: Gesetzliche Zeit Sommerhalbjahr MeSZ
Wasserstand bezogen auf: Seekartennull

Datum			Zeit	Wasserstand (m)
Mo	15.06.2015	HW	03:55	4,1
Mo	15.06.2015	NW	11:19	0,2
Mo	15.06.2015	HW	16:29	4,0
Mo	15.06.2015	NW	23:49	0,2
Di	16.06.2015	HW	04:54	4,0
Di	16.06.2015	NW	12:14	0,2
Di	16.06.2015	HW	17:22	4,0
Mi	17.06.2015	NW	00:45	0,2
Mi	17.06.2015	HW	05:47	4,0
Mi	17.06.2015	NW	13:03	0,2
Mi	17.06.2015	HW	18:08	4,1
Do	18.06.2015	NW	01:32	0,1
Do	18.06.2015	HW	06:33	4,0
Do	18.06.2015	NW	13:43	0,2
Do	18.06.2015	HW	18:48	4,2
Fr	19.06.2015	NW	02:12	0,2
Fr	19.06.2015	HW	07:14	4,0
Fr	19.06.2015	NW	14:20	0,3
Fr	19.06.2015	HW	19:27	4,3
Sa	20.06.2015	NW	02:51	0,3
Sa	20.06.2015	HW	07:54	4,0
Sa	20.06.2015	NW	14:58	0,4
Sa	20.06.2015	HW	20:06	4,3
So	21.06.2015	NW	03:31	0,4
So	21.06.2015	HW	08:33	4,0
So	21.06.2015	NW	15:33	0,4
So	21.06.2015	HW	20:44	4,3

a) Beschreiben Sie, welche Informationen durch diese Tabelle gegeben sind.

b) Übertragen Sie die Tabelle so in eine Tabellenkalkulation, dass eine Wertetabelle einer von der Zeit t abhängigen Funktion g entsteht.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Gezeitenfunktion g. Beschreiben Sie die Schwierigkeiten.

d) Untersuchen Sie, ob es eine Zeitspanne p gibt, so dass $g(t+p)=g(t)$ für alle Zeitpunkte t annähernd erfüllt ist.

Kommentar zur Aufgabe

fachlich:

- Datenerhebung
- Überprüfung einer Begriffsdefinition
- zeitliche Periodizität

didaktisch:

- mathematisches Modellieren
- Nutzung digitaler Werkzeuge
- unterschiedliche mathematische Darstellungen verwenden

methodisch:

- Motivation der SuS durch eine interessante unbekannte Situation
- Einbindung und Ertüchtigung von Alltagswissen

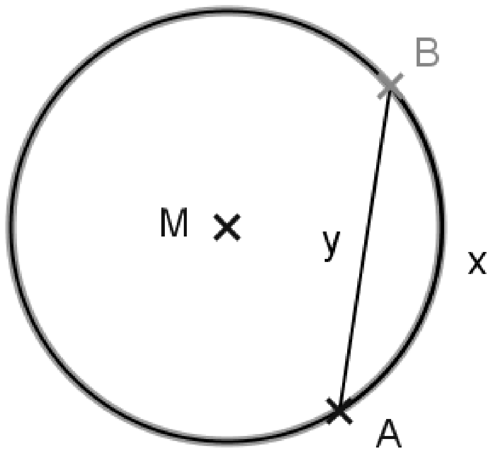
Quellenangabe
(Daten werden stets aktualisiert erzeugt):

http://www.bsh.de/cgi-bin/gezeiten/was_tab.pl?ort=DE__508P&zone=Gesetzliche+Zeit+%B9&niveau=KN

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Untersucht werden die Längen y der Kreissehnen, die von einem festen Punkt A der Kreislinie zu weiteren Punkten B der Kreislinie gezeichnet werden können. Die Lage von B wird dabei durch die jeweilige Länge x des zugehörigen Kreisbogens erfasst.



a) In welchen Bereichen des Kreises bezogen auf die Lage von A ändert sich y am wenigsten/am stärksten, wenn sich x im Vergleich zum Kreisumfang nur wenig ändert.

b) Erstellen Sie mithilfe eines kreisförmigen Gegenstandes (z. B. einem Gymnastikreifen) eine Wertetabelle der Zuordnung $f: x \mapsto y$ und zeichnen Sie maßstäblich den Graphen.

c) Erläutern Sie, inwieweit die vorgenannte Zuordnung periodisch ist.

d) Geben Sie die Stellen x_E mit größtem bzw. kleinstem Funktionswert an.

e) Zeichnen Sie in die obige Abbildung den Mittelpunktswinkel α ein und erstellen Sie jeweils einen Term für x bzw. für y in Abhängigkeit von α und r.

Tipp: Sinus in Dreiecken

Formel: $\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

f) Leiten Sie den Funktionsterm $f(x)$ her.

Kommentar zur Aufgabe

fachlich:

- Vertiefung der Begriffe Funktion und Periode
- Unterscheidung zwischen einem geometrischem Objekt und seinem Maß
- geometrisches Auffinden der Stellen x mit kleinster bzw. größter Änderungsrate von y
- Extremstellen x_E und Extremwerte y_E offensichtlich: immanentes Wiederholen von Umfang und Durchmesser des Kreises
- Proportionalität zwischen Gradmaß und Bogenmaß
- mathematische Klarheit durch Terme in einer konkreten Situation
- Umschreiben einer parametrisierten Kurve zu einem Funktionsgraphen

didaktisch:

- breites Berücksichtigen der prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen
- Vorstrukturierung der Mathematisierung durch Text und Bezeichner
- innere Differenzierung durch erweiterte bzw. reduzierte Vorstrukturierung möglich
- innere Differenzierung durch enaktives arbeitsteiliges Arbeiten möglich
- Rückführen des Problems auf eine Sinusbeziehung im rechtwinkligen Dreieck
- Üben von Problemlösestrategien wie „Aufteilen in Teilprobleme“ und „Extremale Situationen betrachten“

methodisch:

- enaktives Erkunden der Situation möglich
- Einsatz digitaler Werkzeuge gestuft möglich
- sprachliche Sensibilisierung zu „Sinus“
- verschiedene Lösungswege (über Sinus im rechtwinkligen Dreieck oder über Sinussatz) möglich

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 4	Kommentar zur Aufgabe
Betrachten Sie die Gleichung $2 \cdot \sin(3 \cdot x) = 1$. a) Begründen Sie, dass die Gleichung erfüllbar ist. b) Erläutern Sie, dass $\frac{\pi}{18}$ eine Lösung dieser Gleichung ist. c) Geben Sie eine negative Lösung dieser Gleichung an. d) Wie viele Lösungen hat diese Gleichung im Intervall $[0\,;\,2\pi]$? Begründen Sie Ihre Antwort. e) Veranschaulichen Sie den graphischen Lösungsprozess an einem geeigneten Funktionsgraphen.	**fachlich:** ▪ Erfassen des Gleichungslösens als Umkehrprozess einer Funktionswertfindung ▪ Erkennen des Zusammenwirkens von Amplitude und Periode an einem Term ▪ Kenntnis besonderer Sinuswerte bzw. der zugehörigen Winkel ▪ gedankliches Umsetzen einer Streckung in x-Richtung **didaktisch:** ▪ verständiges Argumentieren im Vordergrund stehend ▪ Kopfgeometrie durch Vorhalten der graphischen Darstellung ▪ Kontrolle durch Wechsel der Darstellung (vom Term zum Graphen) ▪ Schwerpunktverlagerung durch Umordnen der Abfolge der Teilaufgaben **methodisch:** ▪ Erkunden/Veranschaulichen der Situation mit digitalen Werkzeugen möglich ▪ Verwendung des WTR / eines Funktionenplotters als Stützgerüst

Aufgabe 5	Kommentar zur Aufgabe
Die Normalparabel $y = x^2$ wird zum einen mit dem Faktor b in x-Richtung gestreckt und zum anderen um c in x-Richtung achsenparallel verschoben. a) Zeigen Sie an einem Zahlenbeispiel, dass der entstehende Graph von der Reihenfolge der beiden Operationen abhängt. Erklären Sie diesen Unterschied anschaulich an den Graphen. b) Leiten Sie durch Termanalyse her, dass die Streckung der Normalparabel mit dem Faktor b in x-Richtung einer bestimmten Streckung in y-Richtung entspricht, und geben Sie den zugehörigen Streckfaktor an. c) Untersuchen Sie analog, wie sich der Graph der Sinusfunktion bezüglich einer Streckung und einer Verschiebung in y-Richtung verhält.	**fachlich:** ▪ Vertiefung des Verständnisses von Streckungen ▪ immanente Wiederholung zur Normalparabel ▪ Anwendung von Potenzgesetzen, Termumformungen im Kontext **didaktisch:** ▪ Synthese von Graph, Operation und Term ▪ Transfer: Analogie der beiden Achsenrichtungen ▪ Einsetzen konkreter Parameterwerte als Kontrollstrategie **methodisch:** ▪ exemplarisches Erkunden der Situation ▪ gutes Einsatzfeld für Funktionenplotter ▪ sin und ^2 als Operatoren im Vergleich (vor- bzw. nachgängige Schreibweise)

Einführende Bemerkungen zum Lernbereich

Die Stereometrie ist das einzige der drei Lerngebiete im ersten Halbjahr der Einführungsphase, welches in allen Anforderungsniveaus der Pflichtschulen eine besondere Rolle spielt. Durch die engen Verknüpfungen mit anderen Themenfeldern der Klassenstufen 9 und 10 können an dieser Stelle vernetzende und vertiefende Lerngelegenheiten entstehen, die wiederum in andere Themenfelder ausstrahlen und dort unterstützen.

Hinweise über verfügbare Inhalte und Fähigkeiten

Die Schwerpunkte im Umgang mit geometrischen Körpern liegen in der Sekundarstufe I der Gemeinschaftsschule in der Berechnung von Volumen und Oberflächeninhalt und im Modellieren von Gegenständen aus der Umwelt mithilfe dieser. Die Herleitung von Formeln erfolgt oft nur exemplarisch und nicht in allgemeiner Form. Auf eine gut strukturierte und reflektierte Herangehensweise an typische Aufgaben wird hingearbeitet, der Umgang mit einer Formelsammlung ist bekannt.

Vernetzungen bestehen vor allem zur Algebra durch das Umstellen von Formeln und das Lösen von Gleichungen; ebenso werden trigonometrische Formeln und Sätze zur Berechnung von Strecken und Winkeln in Körpern genutzt.

Schülerinnen und Schülern des A-Kurses sollte der Satz von Cavalieri bekannt sein. Funktionale Aspekte in den Formeln für Oberflächeninhalte und Volumina sind angesprochen worden. Gleiches gilt für die Zusammenhänge zwischen den Formeln für Oberflächeninhalte und Volumina verschiedener Körper.

Erweiterung der Inhalte der Lehrpläne zum Mittleren Bildungsabschluss

Die Unterschiede zum Stereometrieunterricht in der Sekundarstufe I liegen vor allem in der allgemeineren Sichtweise auf Zusammenhänge, in der Nutzung der Stereometrie als heuristisches Feld zum Beweisenlernen und in einer strengeren formalen Begrifflichkeit.

Eine Erweiterung der Inhalte und der Kompetenzanforderungen erfolgt in diesem Lernbereich im Übergang zu allgemeinen Aussagen. Die Erlangung derartiger Aussagen durch eine Vernetzung geometrischer und algebraischer Sichtweisen wird im Pflichtschulbereich allenfalls basal angestrebt.

Erläuterungen zu den Kompetenzschwerpunkten

Durch die Tatsache bedingt, dass bei den SuS bereits eine große Erfahrung in dem Thema besteht und dessen hohe Prüfungsrelevanz eine ausdauernde Bearbeitung voraussetzt, können Zeiträume für ergänzende Kompetenzschwerpunkte gewonnen werden, die den Übergang in die Hauptphase der Oberstufe erleichtern. Hierbei liegt das Augenmerk insbesondere auf der Überbrückung der Lücke hin zu den oben angesprochenen Erweiterungen.

Hinweise zum Lernabschnitt „Prisma und Zylinder“

Ziel des Lernabschnittes ist eine allgemeingültige und tragfähige mathematische Definition gerader Körper einschließlich des Prismas und des Zylinders als prototypische Vertreter. Verallgemeinerungen und Spezialfälle sollen herausgearbeitet und deren Unterschiede benannt und erläutert werden. Die Berechnung von Oberflächeninhalt und Volumen der einzelnen Körper oder anderer Größen der jeweiligen Körper bei passenden Angaben wird weiter ausgebaut.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Prisma und Zylinder • Vorkommen in Alltag und Technik ○ Prisma als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Vielecks im Raum ○ Zylinder als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Kreises im Raum ○ Eigenschaften von Prisma und Zylinder – Klassifizierung in gerade bzw. schiefe Körper • Eigenschaften von Prisma und Zylinder – parallele und kongruente Strecken und Flächen – abwickelbare Oberfläche • Quader (insbesondere Würfel) als Sonderfall • gerader Kreiszylinder als Sonderfall • Eigenschaften gerader Prismen und Zylinder mit der Höhe h, einer Grundfläche mit dem Umfang U und dem Flächeninhalt G – Mantelinhalt $M = U \cdot h$ – Oberflächeninhalt $O = M + 2 \cdot G$ • Rauminhalt V von Prismen und Zylindern mit der Höhe h und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G $V = G \cdot h$	Die Schülerinnen und Schüler • modellieren geeignete Gegenstände ihrer Umwelt als Prismen bzw. Zylinder **(K3)** • verwenden die Fachbegriffe Ecke, Grundkante, Grundkreis, Grundfläche, Seitenkante, Seitenfläche, Mantel, Mantellinie, Höhe und Oberfläche **(K6)** ○ klassifizieren Prismen auch nach der Anzahl ihrer Seitenflächen **(K6)** • erläutern, dass alle zur Grundfläche parallelen Schnittflächen kongruent zur Grundfläche sind **(K1)** ○ entwickeln aus der Gleichung für das Volumen des Quaders die Gleichung für das Volumen des geraden Prismas **(K5)** ○ machen plausibel, dass gerade und schiefe Prismen mit kongruenter Grundfläche und gleicher Höhe volumengleich sind **(K1)** ○ beschreiben, wie sich Zylinder durch Prismen ausschöpfen lassen **(K6)** • berechnen das Volumen von Prismen und Zylindern **(K5)** • zeichnen Netze von geraden Prismen und geraden Kreiszylindern **(K4)** • berechnen den Mantelinhalt und den Oberflächeninhalt gerader Körper **(K5)** • formulieren, wie sich Oberflächeninhalt und Volumen von Körpern bei maßstabsgerechten Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen verändern **(K6)** • belegen an Beispielen, dass sich der Oberflächeninhalt beim Zerlegen bzw. Ergänzen von Körpern nicht additiv verhält **(K1)** • berechnen längste Strecken innerhalb von Körpern **(K2)**

Hinweise zum Lernabschnitt „Pyramide und Kegel“

Über die im Abschnitt ‚Prisma und Zylinder hinaus genannten Erweiterungen ist in diesem Abschnitt insbesondere die Hinzufügung weiterer Pyramidenarten wichtig. Die Behandlung der in der Sekundarstufe I kennengelernten Körper, nunmehr als Sonderfälle, erweitert das Spektrum der geometrischen Körper und festigt den Blick auf gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften wichtiger Körperklassen.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Pyramide und Kegel • Vorkommen in Alltag und Technik ○ Zerlegung eines Würfels in sechs kongruente quadratische Pyramiden • Eigenschaften von Pyramide und Kegel – Vielecke, bzw. Kreis als Grundfläche – abwickelbare Oberfläche – gerade Körper bei einer Grundfläche mit Umkreis als Sonderfall – schiefe Körper – regelmäßige Pyramide als Sonderfall ○ Rechteck-Pyramide, Dreieck-Pyramide ○ regelmäßiges Tetraeder als Sonderfall • gerader Kegel als Sonderfall – Mantelinhalt bei Grundkreisumfang U und Länge h_s der Mantellinie: $M = \frac{1}{2} \cdot U \cdot h_s$	Die Schülerinnen und Schüler • modellieren geeignete Gegenstände ihrer Umwelt als Pyramiden bzw. Kegel **(K3)** • verwenden die Fachbegriffe Grundfläche, Spitze, Mantellinie und Körperhöhe **(K6)** • zeichnen Schrägbilder von Pyramiden **(K4)** • verwenden Kreisausschnitte zum Bauen von Kegelmodellen **(K3)** • identifizieren bei Pyramide und Kegel rechte Winkel in geeigneten Schnitten und in Schrägbildern **(K3)** ○ leiten beim geraden Kegel den Zusammenhang zwischen Grundkreisradius, Körperhöhe und Länge der Mantellinie her **(K2)** ○ berechnen den Winkel zwischen einer Kante und einer Fläche als Winkel zwischen der Kante und ihrer senkrechten Projektion in die Fläche **(K1)** • berechnen Mantelinhalt und Oberflächeninhalt gerader Körper **(K5)** ○ überprüfen die Eulersche Polyederformel an Prismen und Pyramiden **(K1)**

Hinweise zum Lernabschnitt „Das Prinzip von Cavalieri“

Ein formaler Beweis des Satzes ist in dieser Klassenstufe nicht möglich, wohl aber die Veranschaulichung durch eine Zerlegung in beliebig (endlich) viele und beliebig dünne Teilkörper. Somit besteht an dieser Stelle die Möglichkeit, Elemente der Infinitesimalrechnung anschaulich vorzubereiten.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Das Prinzip von Cavalieri ○ <u>Prinzip von Cavalieri:</u> Wenn zwei Körper in gleicher Grundebene in jeder zur Grundebene parallelen Schnittebene inhaltsgleiche Schnittflächen haben, dann haben beide Körper das gleiche Volumen.	Die Schülerinnen und Schüler ○ begründen anhand eines Beispiels, dass das Prinzip von Cavalieri nicht umkehrbar ist **(K1)**

Das Prinzip von Cavalieri (Fortsetzung) • <u>Satz:</u> Prismen sowie Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben das gleiche Volumen. ○ Zerlegung eines geraden dreiseitigen Prismas in drei volumengleiche dreiseitige Pyramiden • Rauminhalt $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ für Pyramiden mit Grundflächeninhalt G und Körperhöhe h	Die Schülerinnen und Schüler ○ berechnen den Flächeninhalt von zur Grundfläche parallelen Schnittflächen an Pyramiden und Kegeln **(K5)** ○ begründen die Volumengleichheit der drei Pyramiden bei der spezifischen Zerlegung des dreiseitigen Prismas und damit die Volumenformel der Pyramide **(K1)** • berechnen Volumina von Pyramiden **(K5)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K3)**

Hinweise zu den Lernabschnitten „Halbkugel“ und „Kugel“

Die Behandlung der Kugel erstreckt sich in der Sekundarstufe der Gemeinschaftsschulen hauptsächlich auf die Berechnung von Volumen und Oberflächeninhalt. Ergänzend dazu spielen nun vertiefende Betrachtungen der Oberfläche sowie die Besonderheiten der Kugel eine Rolle. Darüberhinaus ist eine Herleitung der Formeln eine denkbare Erweiterung.
Die Formeln für die Halbkugel werden vergleichend in Beziehung mit den Formeln für Zylinder und Kegel mit gleicher Höhe und gleichem Grundkreisradius gesetzt.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Halbkugel • Vorkommen in Alltag und Technik ○ archimedischer Restkörper • Eigenschaften der Halbkugel mit Grundflächeninhalt G und Grundkreisradius h – Rauminhalt $V=\frac{2}{3}\cdot G\cdot h$ – Mantel nicht abwickelbar	Die Schülerinnen und Schüler ○ leiten die Volumenformel für die Halbkugel mit Hilfe des archimedischen Restkörpers her **(K1)** • legen dar, dass Kegel, Halbkugel und Zylinder mit gleichem Radius und gleicher Höhe das Volumenverhältnis 1:2:3 haben **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K3)**
Kugel • Vorkommen in Alltag und Technik • Eigenschaften der Kugel mit Radius r – Rauminhalt $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ – Oberflächeninhalt $O=4\pi\cdot r^2$ – Oberfläche nicht abwickelbar ○ Kugel als Körper mit kleinstem Oberflächeninhalt bei vorgegebenem Volumen ○ Kugel als Körper mit größtem Volumen bei vorgegebenem Oberflächeninhalt	Die Schülerinnen und Schüler ○ zerlegen die Kugel mittels Zerlegung der Oberfläche näherungsweise in Pyramiden mit dem Kugelradius als Höhe und begründen damit die Gleichung für den Oberflächeninhalt **(K3)** ○ begründen, dass für den Mantelinhalt von Zylinder und Halbkugel die gleiche Formel $M=U\cdot h$ gilt **(K1)** • vergleichen die Oberflächeninhalte verschiedener Körper gleichen Volumens mit dem der Kugel **(K2)** • nennen Beispiele aus der Natur, bei denen das Verhältnis von Oberflächeninhalt und Volumen von Bedeutung ist **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K5)**

Exemplarische Aufgaben

Vorbemerkungen zu den Aufgaben

Die Beispielaufgaben zu diesem Lernbereich fokussieren vor allem auf die Zusammenhänge zwischen den geometrischen und den algebraischen Aspekten in der Stereometrie. Das Erkennen funktionaler Zusammenhänge, die Beschreibung abhängiger und unabhängiger Variablen und die verschiedenen Zugänge zu einem Problem und dessen Lösungsansätzen liefern gute Vorbereitungen für die Analysis.

Das Arbeiten im Vorstellungsraum und das Anfertigen von Zeichnungen zur Illustration von Fragestellungen dienen insbesondere einer Vertiefung räumlicher Vorstellung, die in der analytischen Geometrie zum Tragen kommt.

Aufgabe 1

Beschreiben Sie die Veränderung des Volumens eines Zylinders bzw. eines Prismas, wenn man

a) die Grundfläche verdoppelt und die Höhe beibehält?

b) bei gleichbleibender Grundfläche die Höhe verdreifacht?

c) beim Zylinder die Körperdiagonale verdoppelt und den Radius beibehält?

Stellen Sie jeweils eine Funktionsgleichung auf, die den jeweiligen Zusammenhang beschreibt. Skizzieren Sie jeweils den dazugehörenden Graphen.

Kommentar zur Aufgabe

fachlich:

- funktionale Abhängigkeiten mithilfe von Variablen beschreiben

didaktisch:

- Verknüpfung von Algebra und Geometrie
- Problemlösen durch heuristische Strategien

methodisch:

- funktionale Zusammenhänge erkunden
- Funktionsgleichungen angeben und dadurch Argument und Wert bestimmen
- Software (Tabellenkalkulation) zum Erkunden einsetzen

Aufgabe 2

Folgendes Angebot findet sich im Internet:

KG 2000 Rohr
DN 110
Länge 1000 mm
Art. 5514254

Artikel jetzt bewerten >

Materialspezifizierung:
Polypropylen (PP)
Durchmesser: 110 mm
Farbe: orange

Mehr Artikeldetails >

Länge: 1000 mm

Schätzen Sie begründet und berechnen Sie dann, wie viel Wasser in einer Minute durch ein solches Rohr geleitet werden kann, wenn man von einer durchschnittlichen Fließgeschwindigkeit von $3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ausgeht?

Kommentar zur Aufgabe

fachlich:

- Errechnen eines Wasservolumens mithilfe von Fließgeschwindigkeit und Maßen des Rohres sowie Grenzannahmen

didaktisch:

- Modellieren von Alltagssituationen
- Verknüpfen verschiedener Größen
- Annahmen treffen und überprüfen
- Beschreibung von Prozessen

methodisch:

- Texte und Grafiken erfassen und deuten
- Problemaufgabe zum kooperativen Lösen

Exemplarische Aufgaben

<table>
<tr><th>Aufgabe 3</th><th>Kommentar zur Aufgabe</th></tr>
<tr><td>
An eine gerade quadratische Pyramide, bei der Grundkantenlänge und Höhe übereinstimmen, wird senkrecht zur Grundfläche und parallel zur Grundkante in deren Mitte ein Schnitt gelegt. Es entstehen zwei neue identische Körper.
Geben Sie an, um wie viel Prozent sich die Oberfläche eines der neu entstandenen Körper im Vergleich mit der Oberfläche der ursprünglichen Pyramide verändert hat. Nutzen Sie zunächst verschiedene Zahlenbeispiele, um die Fragestellung zu verstehen.
</td><td>
fachlich:
ebener Schnitt durch einen geometrischen Körper
Funktionale Abhängigkeiten von Flächeninhalten
didaktisch:
Arbeiten im Vorstellungsraum
abhängige und unabhängige Größen identifizieren und beschreiben
Heuristiken problemgerecht einsetzen
methodisch:
Anfertigen von Zeichnungen
</td></tr>
<tr><th>Aufgabe 4</th><th>Kommentar zur Aufgabe</th></tr>
<tr><td>
Für einen Körper mit Volumen V und Oberflächeninhalt O dient der Quotient $\frac{V^2}{O^3}$ zur Beurteilung des Wechselspiels zwischen den beiden beteiligten Größen.
a) Untersuchen Sie die Maßeinheit dieses Quotienten.
b) Erstellen Sie jeweils einen vereinfachten Term des Quotienten für
i) einen Würfel mit Kantenlänge a
ii) einen Zylinder mit Durchmesser d und Höhe d
iii) eine Kugel mit Radius r
iv) ein reguläres Tetraeder mit Kantenlänge b
v) ein reguläres Oktaeder mit Diagonalenlänge c .
c) Die Ergebnisse aus b) belegen, dass es sich bei der Kugel hinsichtlich des Quotienten um einen optimalen Körper handelt. Interpretieren Sie diese Aussage.
d) Für welche Zahl x hat das Produkt $x \cdot \frac{V^2}{O^3}$ bei der Kugel den Wert 1?
</td><td>
fachlich:
Verhältnis zwischen Volumen und Oberflächeninhalt eines Körpers
Dimensionenproblematik
didaktisch:
Verstehen komplexer geometrisch-algebraischer Aufgabenstellungen
Beweisen und Begründen
methodisch:
arbeitsteiliges Vorgehen
</td></tr>
</table>

Einführende Bemerkungen zum Lernbereich

Die Fortführung der in der Sekundarstufe I bereits in unterschiedlichen Facetten beleuchteten linearen Wachstums- und Zerfallsprozesse und die Erweiterung um exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse, welche in der Klassenstufe 10 der Gemeinschaftsschule allenfalls auf einem funktional-basalen Niveau verdeutlicht wurden, bieten eine Gelegenheit im Sinne spiralförmigen Lernens Verstehens-Voraussetzungen von Schülerinnen und Schülern auf unterschiedlichen Niveaustufen aufzugreifen und kumulativ weiterzuentwickeln.

Hinweise über verfügbare Inhalte und Fähigkeiten

In der Klassenstufe 10 der Gemeinschaftsschule lernen Schülerinnen und Schüler innerhalb der Themenfelder „Gleichungen, Zuordnungen und Funktionen“ und „Veränderungen – Wachstum und Abnahme“ die Exponentialfunktion kennen. Anhand realer Problemstellungen werden Modellierungsaufgaben bearbeitet, beschrieben und bewertet, ebenso werden die Modelle hinsichtlich ihrer Grenzen bewertet. Die Potenzgesetze sind bekannt und auch Näherungsverfahren werden mit dem Taschenrechner durchgeführt. Parameter in Funktionen werden (auch mit einem Funktionenplotter) variiert und die Auswirkungen interpretiert.

Lineare und exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse werden auf der Grundlage des Folgenbegriffs zunächst im Rahmen diskreter Modelle behandelt. Reelle Exponenten ermöglichen die Definition von Exponentialfunktionen und das Modellieren mithilfe stetiger Modelle.

Der Logarithmus als tragender Begriff der Umkehroperation ist sowohl innermathematisch wie auch in vielen Anwendungsbereichen von Bedeutung. Die Logarithmengesetze ergeben sich unmittelbar aus den Potenzgesetzen, werden nur im A-Kurs explizit thematisiert. Die Einführung der Logarithmusfunktionen bleibt der Hauptphase vorbehalten.

Erweiterung der Inhalte der Lehrpläne zum Mittleren Bildungsabschluss

Die Mehrzahl der Kompetenzschwerpunkte zum Thema Exponentialfunktion sind aus der der Sekundarstufe I bereits verfügbar. Ein wesentlicher Unterschied besteht in der Komplexität und der inhaltlichen Tiefe der zu behandelnden Themen. Formal definierte Zahlenfolgen und deren Klassifizierung sind den Schülerinnen und Schülern noch nicht bekannt.

Die intensive Behandlung der Thematik unter dem Gesichtspunkt „Funktionaler Zusammenhang“ ergibt vielfältige Möglichkeiten, die Schülerinnen und Schüler auf die Anforderungen in der Hauptphase vorzubereiten. Begriffe aus der Analysis wie Definitions- und Wertemenge, Monotonie, Umkehrbarkeit, Asymptote, Grenzwerte werden immer wieder angesprochen und geben den Schülerinnen und Schülern propädeutische Einblicke in Inhalte der Hauptphase.

Erläuterungen zu den Kompetenzschwerpunkten

Die formal-begriffliche Behandlung von Funktionen wird ausgeschärft und unter Zuhilfenahme neuer Fachbegriffe intensiviert. Die Nutzung des Grenzwertbegriffs schlägt die Brücke zur Analysis. Die Erweiterung durch die Logarithmusfunktion sowie die Logarithmusgesetze ermöglicht weitere Operationen und Betrachtungen.

Die Zuhilfenahme einer Tabellenkalkulation bietet sich immer wieder zur Untersuchung – auch realer Aufgabenstellungen – an. Insbesondere lassen sich Wachstumsmodelle auf ihre Sinnhaftigkeit (Stichwort: Große Zahlen) untersuchen und vergleichen.

Einführende Hinweise zum Lernabschnitt „Lineares Wachstum“

Lineares Wachstum ist ein grundlegendes funktionales Konzept aus der Sekundarstufe I. In diesem Lernabschnitt werden die formalen Aspekte nebst den dazugehörenden Begriffen verstärkt. Auf der diskreten Ebene wird eine Vernetzung mit Zahlenfolgen hergestellt. Die Angabe dieser Folgen, sowohl in expliziter als auch in rekursiver Form, fördert den Umgang mit der Vielfalt von Darstellungsformen in funktionalen Zusammenhängen.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Lineares Wachstum • lineares Wachstum im Alltag ○ arithmetische Folgen – Bezeichnung: Glied Nr. n der Folge, Symbol a_n – $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursiv) – $a_n = a_0 + n \cdot d$ (explizit) ○ charakteristische Merkmale – konstante Differenz $a_{n+1} - a_n$ als konstante Wachstumsrate – Anfangswert a_0 – Graph aus diskreten Punkten auf einer Geraden – Wachstumsverhalten – unbeschränktes Wachstum – Grenzwertsymbolik	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele aus dem Alltag für lineare Wachstumsprozesse **(K3)** • erstellen Terme arithmetischer Folgen zu innermathematischen Aufgabenstellungen, z. B. zur Folge der ungeraden Zahlen **(K2)** • erstellen Tabellen zu arithmetischen Folgen mithilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** ○ zeichnen Graphen arithmetischer Folgen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge **(K4)** ○ entscheiden, ob eine vorgegebene Folge arithmetisch ist **(K1)** ○ stellen den Zusammenhang zwischen Termen bzw. Graphen arithmetischer Folgen und linearer Funktionen her **(K4)** • beschreiben das Wachstumsverhalten mithilfe der Begriffe „streng monoton wachsend“, „streng monoton fallend“ bzw. „konstant“ **(K6)** ○ verwenden die Schreibweisen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ **(K4)**

Einführende Hinweise zum Lernabschnitt „Exponentielles Wachstum“

Ebenso wie beim linearen Wachstum wird in diesem Abschnitt eine Formalisierung eingeleitet, die weitergehende Untersuchungen ermöglichen. Jetzt wird durch die Verknüpfung mit geometrischen Folgen ein Übergang in verschiedene Darstellungsweisen gefördert. Die Beobachtung des Verhaltens von Folgen und Funktionen für wachsende Argumente legt die Basis für eine tiefergehende mathematische Entwicklung in diesem Gebiet.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Exponentielles Wachstum • exponentielles Wachstum im Alltag ○ geometrische Folgen mit $a_0, q > 0$ – $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (rekursiv) – $a_n = a_0 \cdot q^n$ (explizit)	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele aus dem Alltag für exponentielle Wachstumsprozesse **(K3)** ○ erstellen Terme geometrischer Folgen in Kontexten **(K2)**

Exponentielles Wachstum (Fortsetzung) ○ charakteristische Merkmale – konstanter Quotient $a_{n+1} : a_n$ als konstanter Wachstumsfaktor – Anfangswert a_0 – Wachstumsverhalten in Abhängigkeit vom Wachstumsfaktor q mit $0 < q < 1$ bzw. $q > 1$ – Grenzwertverhalten ○ Grenzwertsymbolik • Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$	Die Schülerinnen und Schüler ○ erstellen Tabellen zu geometrischen Folgen mithilfe einer Tabellenkalkulation **(K5)** ○ zeichnen Graphen geometrischer Folgen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge **(K4)** • grenzen exponentielles und lineares Wachstum gegeneinander ab **(K1)** ○ verwenden bei $0 < q < 1$ die Sprechweise „a_n liegt beliebig nahe bei 0, wenn n nur hinreichend groß ist“ **(K6)** ○ verwenden bei $0 < q < 1$ die Sprechweise „a_n konvergiert gegen 0" und die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben zu gesuchten Endwerten, Wachstumsfaktoren oder Zeiträumen, auch mithilfe einer Tabellenkalkulation **(K2)**

Einführende Hinweise zum Lernabschnitt „Exponentialfunktionen“

Die neu beobachteten Eigenschaften werden nunmehr in neue mathematische Begriffe gefasst bzw. in die bereits bekannte Fachsprache eingeordnet. Die Umkehrbarkeit als Funktionseigenschaft sollte vom bloßen Auflösen einer Gleichung, wie es noch beim Wurzelziehen altersgemäß angesagt war, abstrahiert werden.

Die Funktionaleigenschaft für die Exponentialfunktionen führt natürlich auf die Frage nach Funktionaleigenschaften anderer Grundfunktionen, wie etwa den linearen Funktionen (und später den Logarithmusfunktionen). Den Schülerinnen und Schülern fällt es im Regelfall schwer, zwischen Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen zu unterscheiden, zumal bei beiden die Potenzrechenregeln zum Einsatz kommen.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Exponentialfunktionen • Potenzbegriff für reelle Exponenten • Exponentialfunktion der Form $f : D \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto a \cdot b^x$, wobei $a,\ b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen näherungsweise Potenzen mit reellen Exponenten mithilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** • erstellen Wertetabellen zu Exponentialfunktionen bei verschiedenen Parameterwerten, auch mittels Tabellenkalkulation, und skizzieren die Funktionsgraphen **(K4)** • beschreiben die jeweilige Auswirkung der Variation der Parameter a und b auf den Graphen der Funktion **(K6)** • stellen den Zusammenhang zwischen Termen bzw. Graphen geometrischer Folgen und Exponentialfunktionen her **(K4)** • beschreiben mithilfe der Definition der Monotonie das Monotonieverhalten **(K4)** • lesen am Graphen bei gegebenem Funktionswert den zugehörigen x-Wert ab **(K2)**

Exponentialfunktionen (Fortsetzung) • Eigenschaften – Definitionsmenge – Graph – Wertemenge – Monotonie – Umkehrbarkeit – x-Achse als Asymptote für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$ – y-Achsenabschnitt a – Funktionaleigenschaft $f(x+1) = b \cdot f(x)$ – Eindeutigkeit der Parameter bei Vorgabe zweier Punkte des Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • begründen, dass die Spiegelung der Exponentialkurve zur Basis b an der y-Achse die Exponentialkurve zur Basis $\frac{1}{b}$ ergibt: $b^{-x} = (1/b)^x$ **(K1)** • beschreiben das asymptotische Verhalten in Abhängigkeit von der Basis b **(K6)** • begründen die Funktionaleigenschaft **(K1)** • erläutern an einem Beispiel, dass die Funktionaleigenschaft sowohl eine Verschiebung in x-Richtung als auch eine Streckung in y-Richtung beschreibt **(K1)** • stellen aus zwei Punkten des Graphen die Funktionsgleichung auf **(K5)**

Einführende Hinweise zum Lernabschnitt „Logarithmen“

Die Suche nach dem Exponenten bei gegebener Basis und gegebenem Wert der Potenz wird von einer reinen Darstellungsart als Logarithmus hin zu einer mathematischen Operation erweitert. Diese lässt die Nutzung u. a. als Operator bei Gleichungsumformungen zu. Die Einführung der Logarithmengesetze unter Rückführung auf die bereits bekannten Potenzgesetze erlaubt den mathematisch-logischen Herleitungsbegriff auf einfache Art zu erfahren.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Logarithmen • Logarithmus von y zur Basis b – Symbol $\log_b(y)$ – $\log_b(y)$ als Lösung von $b^x = y$ – $\log_b(1) = 0$ – $\log_b(b) = 1$ • Logarithmus zur Basis 10 – Bezeichnung lg ○ Logarithmengesetze – $\log(y_1 \cdot y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)$ – $\log(y^r) = r \cdot \log(y)$	Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln zu einem exponentiellen Wachstumsprozess graphisch den Zeitpunkt des Erreichens eines gewissen Wertes **(K2)** • erläutern den Begriff des Logarithmus im Kontext und grenzen ihn ab gegen den Begriff der n-ten Wurzel **(K6)** • erläutern, dass der Logarithmus $\log_b(c)$ die Zahl ist, mit der man b potenzieren muss, um c zu erhalten **(K6)** • geben in einfachen Fällen bei Potenzen mit rationalem Exponenten den Logarithmus zu einer geeigneten Basis an **(K5)** • schätzen mithilfe der Stufenzahlen der Basis positive Logarithmen ganzzahlig ab **(K5)** ○ begründen die Logarithmengesetze mit Hilfe der Potenzgesetze **(K1)** ○ verbalisieren die Logarithmengesetze **(K6)** ○ wenden die Logarithmengesetze beim Berechnen von Logarithmen an **(K5)** • berechnen Logarithmen näherungsweise mithilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** • lösen Exponentialgleichungen der Form $a \cdot b^x = c$ und bestimmen Näherungslösungen mit dem Taschenrechner **(K5)**

Hinweise zum Lernabschnitt „Modellieren von exponentiellen Wachstumsprozessen"

Die Nutzung der Erkenntnisse in Sachkontexten aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler schafft nicht nur eine Motivation hinsichtlich mathematischen Arbeitens sondern schult auch den Blick für die Grenzen von Modellierungsprozessen. Ein stetes Hinterfragen sowohl des mathematischen Modells als auch der gewonnenen Ergebnisse stärkt den Charakter der Mathematik als kritisches Werkzeug.

Verbindliches Fachwissen	Kompetenzschwerpunkte
Modellieren von exponentiellen Wachstumsprozessen mithilfe von Exponentialfunktionen mit $x \mapsto a \cdot b^x$ • Anwendungsaufgaben • Charakteristische Größen – Anfangswert – Wachstumsfaktor – Halbwertszeit, Verdopplungszeit • Faustregel für Kapitalverdopplung: $t \approx \frac{70}{p}$	Die Schülerinnen und Schüler • bearbeiten Aufgaben zu exponentiellen Wachstumsprozessen mithilfe von Exponentialfunktionen **(K2)** • bestimmen charakteristische Größen bei Wachstumsprozessen **(K5)** • bewerten im Rahmen des Modellbildungskreislaufs den Realitätsbezug ihrer Vorgehensweise und der gefundenen Ergebnisse **(K6)**

Exemplarische Aufgaben

Vorbemerkungen zu den Aufgaben

Die folgenden Aufgabenbeispiele zeigen Möglichkeiten auf, zu einer erhöhten Komplexität und Tiefe der inhaltlichen Behandlung des Themengebietes zu gelangen. Dabei erfordert das Zusammentreffen von diskreten Modellierungen (als Folgen) einerseits und analytisch kontinuierlichen Beschreibungen (als Exponentialfunktionen) andererseits gewisse Routinen in der Wahl der mathematischen Werkzeuge und im Umgang mit ihnen.

Die Aufgaben bieten im Regelfall gute Gelegenheiten zum immanenten Wiederholen von Kalkülen aus Arithmetik und Algebra. Die Kontexte der Aufgaben sind so gewählt, dass Erweiterungen und Variationen durch die Lehrpersonen und durch die Schülerinnen und Schüler naheliegen.

Handlungsorientierte und experimentelle Einstiege (mit und ohne Tabellenkalkulation) führen motivierend in die Reflexion mathematischer Modellierungen ein. Das Wechselspiel zwischen einem propädeutischen Grenzwertbegriff und dem exakten Analysieren von Näherungsprozessen erfordert beim Durchlaufen des Modellbildungskreislaufs prozessbezogene Kompetenzen auf erhöhtem Anforderungsniveau.

Aufgabe 1	Kommentar zur Aufgabe
Eine berühmte Zahlenfolge sind die so genannten Fibonacci-Zahlen. Diese Zahlenfolge ist rekursiv definiert, d. h. das jeweils nächste Folgenglied wird unter Rückgriff auf vorangehende Folgenglieder nach einer festen Vorschrift gebildet. Rekursive Definition der Fibonacci-Folge: $f_1 = 1$; $f_2 = 1$; $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 2$	siehe nächste Seite

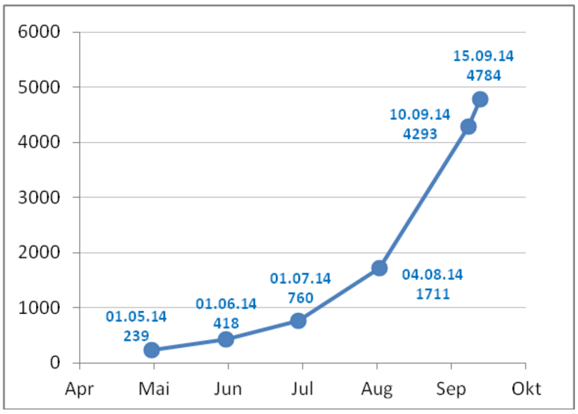
Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 1 (Fortsetzung)	Kommentar zur Aufgabe
a) Erstellen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation eine Wertetabelle für die ersten zwanzig Fibonacci-Zahlen. Stellen Sie die Wertepaare in einem Diagramm dar und beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes. b) Offensichtlich verhalten sich die Fibonacci-Zahlen ähnlich wie eine geometrische, stark wachsende Zahlenfolge, also gemäß einer Darstellung der Form $f_n \approx a \cdot b^n$. Erweitern Sie Ihre Wertetabelle um die Quotienten $\frac{f_n}{f_{n-1}}$. Interpretieren Sie. c) Offensichtlich konvergiert der vorgenannte Quotient für wachsendes n gegen einen Grenzwert b. Lesen Sie den auf vier Nachkommastellen gerundeten Näherungswert für b aus Ihrer Wertetabelle ab. d) Im Grenzfall erfüllt der Grenzwert b die Gleichungen $\frac{f_{n+1}}{f_n} = b = \frac{f_n}{f_{n-1}}$ mit $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ Begründen Sie die vorstehenden Gleichungen und zeigen Sie, dass diese kombiniert auf die Bestimmungsgleichung $b^2 - b - 1 = 0$ führen. e) Zeigen Sie, dass die Gleichung $b^2 - b - 1 = 0$ die Zahl $b = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)$ als Lösung hat. f) Für große n kennt man die Näherungsformel: $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)\right)^n$. Mit welcher Genauigkeit erfasst diese Näherungsformel das Folgenglied f_{20}? g) Recherchieren Sie im Internet die exakte Binet-Formel $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ und überprüfen Sie ihre Gültigkeit numerisch für einige Indizes n.	**fachlich** ▪ Fibonacci-Zahlen als geometrische Folge („diskrete Funktion“) ▪ Funktionsvariable als Index von Folgen ▪ Analyse/Vergleich von Näherungsformeln mit exakten Lösungen ▪ Thematisierung von Grenzverhalten ▪ Umgang mit nichtlinearen (z. B. quadratischen) Gleichungen und Gleichungssystemen ▪ Formel von Binet (Erzeugung natürlicher Zahlen über Formeln mit irrationalen Termbestandteilen) **didaktisch** ▪ von Näherungswerten für Folgenparameter über den Grenzwert zu exakten Parameterwerten ▪ Bezugnahme zum Goldenen Schnitt **methodisch** ▪ Hilfsmittel Tabellenkalkulation zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen ▪ Propädeutisches Erfahren der Konvergenz ▪ diskrete Visualisierungen in Graphen und Tabellen ▪ Einüben mathematischer Sprechweisen („für n gegen unendlich strebt …“)

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 2

Die nachstehende Grafik gibt einen Einblick in die Entwicklung der Anzahl der Ebola-Infektionsfälle in einem bestimmten Gebiet im Jahre 2014.



Quelle: Die Welt (15.09.2014)

a) Um wie viel Prozent stieg die Anzahl der Infektionen im Mai 2014?

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Zunahme der Infektionen pro Tag im Mai 2014.

c) Erstellen Sie eine exponentielle Funktionsgleichung, welche die Entwicklung der Anzahl der Infektionen in dem in der Grafik dargestellten Zeitraum annähert. Überprüfen Sie Ihr Modell mit den angegebenen Zahlen.

d) Überprüfen Sie die Aussage „Die Zahl der Infizierten verdoppelt sich ungefähr alle drei Wochen.“ anhand der im Diagramm gegebenen Daten.

Kommentar zur Aufgabe

fachlich
- Wiederholung von Grundwissen aus der Prozentrechnung
- Unterscheidung zwischen absoluter und relative Zunahme
- kontextgerechte Mittelwertbildung (arithmetischer MW bei linearem Wachstum; geometrischer MW bei exponentiellem Wachstum
- Wachstumsfaktoren bei unterschiedlichen Zeitintervallen
- kontinuierliche funktionale Beschreibung als Alternative zur diskreten Folge
- Logarithmieren als Umkehroperation
- Untersuchung von Vervielfachungszeiten

didaktisch
- Vergleichen unterschiedlicher Wachstumsarten
- Umgang mit Diagrammen

methodisch
- Analyse, Beurteilung und Grenzauslotung des angewendeten Modells
- Diskussion über Güte des Modells

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 3	Kommentar zur Aufgabe
100 Standard-Spielwürfel (Laplace-Würfel) werden zugleich geworfen. Nach dem Wurf entfernt man diejenigen Würfel, die eine „6" zeigen und notiert die Anzahl a_1 der sich nach dem ersten Wurf noch im Spiel befindlichen Würfel. Dieses Vorgehen wiederholt man mit den jeweils verbleibenden Würfeln, bis entweder keine Würfel mehr vorhanden sind oder bis zwanzigmal geworfen wurde. a) Führen Sie das beschriebene Zufallsexperiment durch und notieren Sie die Zahlen a_0 bis a_{20}. Vergleichen Sie Ihre Zahlenkette mit den Ergebnissen Ihrer Mitschüler. b) Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Beschreiben und begründen Sie den Verlauf der zugehörigen Schaubilder. c) Offensichtlich zeigen die Schaubilder exponentielles Verhalten (Zerfall). Formulieren Sie ein exponentielles Zerfallsgesetz, das die Situation näherungsweise mathematisch erfasst. d) Ab welcher Wurfzahl n sinkt nach dem gefundenen Modell die Anzahl a_n der erwartungsgemäß verbleibenden Würfel unter die Zahl 1. e) Lothar und Svenja sind zu faul zum Würfeln. Sie formulieren nach reichlicher Überlegung folgende Zerfallsgesetze: Lothar: $a_n = a_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$ Svenja: $a_n = a_0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$ Was haben sich die beiden wohl gedacht? Vergleichen Sie mit Ihrem Zerfallsgesetz aus Teilaufgabe c.	**fachlich** • Wiederholung von Inhalten der Wahrscheinlichkeitsrechnung / Stochastik • Wiederholung von Ungleichungen und Logarithmen • Mathematisches Modell (Exponentialfunktion) in ungewohntem Sachgebiet • Zusammentreffen von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit **didaktisch** • Nachdenken der SuS über „fremde" Modelle (Perspektivwechsel) und Fehlersuche • Analysieren von vermeintlichen Modellierungsalternativen • Förderung der Diskussion über Inhalte und Modelle in der Mathematik, Reflexion **methodisch** • Verwendung eines Simulationswerkzeugs • großer Zeitbedarf bei der händischen Durchführung

Exemplarische Aufgaben

Aufgabe 4	Kommentar zur Aufgabe
Beim Abtauchen in einem trüben See nimmt die Lichtintensität exponentiell je Meter Tauchtiefe um 20 Prozent ab, beim Auftauchen entsprechend wieder zu. Karla stellt für die Lichtintensität beim Abtauchen von der Wasseroberfläche *W* in die Tiefe die Gleichung $L(x) = L_W \cdot (1-0{,}2)^x$ auf. a) Erläutern Sie die Bedeutung der in der Gleichung auftretenden Variablen im Kontext. b) Erstellen Sie eine Wertetabelle, die in ganzzahligen Schritten die ersten vier Meter Tauchtiefe erfasst. c) Berechnen Sie die Wassertiefe, in der nur noch ein Drittel der an der Wasseroberfläche herrschenden Lichtintensität vorliegt. d) In 10 m Tiefe herrscht eine Lichtintensität von 11 Lux. Um die Lichtverhältnisse beim Auftauchen zu erfassen, verwendet Klara die Gleichung $L(h) = 11 \cdot (1{,}2)^h$ Lux. i) Welche Überlegungen hat Klara hierbei vermutlich angestellt? ii) Erläutern Sie die Bedeutung der in der Gleichung auftretenden Variablen im Kontext. iii) Berechnen Sie mit Klaras Ansatz die Lichtintensität für die Tauchtiefe 7 Meter. iv) Welche Lichtintensität herrscht gemäß Klaras Ansatz an der Wasseroberfläche? e) An der Wasseroberfläche herrscht tatsächlich die Lichtintensität 100 Lux. i) Berechnen Sie die Lichtintensität in der Tiefe 7 m (10 m). ii) Vergleichen Sie mit Klaras Berechnungen. iii) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse in den Aufgabenteilen d) und e). iv) Geben Sie die „richtige" Gleichung an, welche die Lichtverhältnisse beim Auftauchen aus der Tiefe 10 m erfasst.	**fachlich** • kontinuierliche Messgröße • Bruchteile und Prozentwerte • Logarithmengesetze **didaktisch** • Lichtintensität als Alltagsbegriff (Helligkeit) • reversibler Vorgang bei gleichbleibender mathematischer Modellierung • Konflikt zwischen dem Funktionsvariablenbezeichner x und dem Achsenbezeichner x im Koordinatensystem • Schwierigkeit bei der Vorzeicheninterpretation von x bzw. von h. • Modellwechsel oberhalb der Wasseroberfläche notwendig **methodisch** • klassischer Schülerfehler in Teil d) beim Modellieren des Wachsens mit $\left(\frac{1}{1-p}\right)^x$ bzw. $(1-p)^{-x}$ in vermeintlicher Analogie zum Zerfall • Zerfall im Kontinuum