

Lehrplan

Mathematik

Gewerbeschule/Sozialpflegeschule

Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft

Hohenzollernstraße 60, 66117 Saarbrücken
Postfach 10 24 52, 66024 Saarbrücken
Saarbrücken 2005

Hinweis:

Der Lehrplan ist online verfügbar unter
www.bildungserver.saarland.de

Einleitende Hinweise

Dem vorliegenden Lehrplan liegt die Verordnung - Prüfungsordnung - über die staatliche Abschlussprüfung an den zweijährigen Gewerbeschulen und den zweijährigen Sozialpflegeschulen (Berufsfachschulen) im Saarland (APO - GS/SPFS) vom 16. Oktober 1984 in der Fassung vom 18. Mai 2005 zugrunde. Sie folgt der KMK-Rahmenvereinbarung über die Berufsfachschulen vom 28. Februar 1997 in der Fassung vom 22. Oktober 2004.

Der Lehrplan orientiert sich an den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003)*.

Wichtigstes Ziel des Mathematikunterrichts in den Berufsfachschulen ist es, die in den Bildungsstandards genannten Grunderfahrungen zu ermöglichen:

- " - technische, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen
- Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen
- in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben. "

Hieraus wurden die Lerngebiete des Lehrplans unter Berücksichtigung der in den Bildungsstandards ausgewiesenen Leitideen entwickelt. Die angegebenen Zeitrichtwerte sollen eine zunehmend offene und die Schülerkooperation fördernde Unterrichtsgestaltung ermöglichen. Sie enthalten die Zeiten für Wiederholungen, Leistungsfeststellungen und gezielte Vertiefungen, die mit rund einem Drittel angesetzt sind.

Die Lernziele beschreiben in der Verbindung mit den Lerninhalten die zu erarbeitenden Kenntnisse und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler. Sie bilden die Grundlage für Leistungsfeststellungen und die zentrale Abschlussprüfung, sollen jedoch nicht ein ständig an "Leistungsmessungen" orientiertes Lernen von Formeln und Kalkülen begünstigen. Auf die sprachliche Beschreibung von Problemsituationen, Zusammenhängen und Prozessen sowie die Interpretation von mathematischen Darstellungen und Ergebnissen wird gesteigerter Wert gelegt. Bei der Auswahl der Lerninhalte wurden die Vorbereitung des Besuchs einer weiterführenden Schule und die Anwendbarkeit in Lernfeldern einer beruflichen Ausbildung sowie in Situationen des täglichen Lebens gleichermaßen berücksichtigt.

Die didaktische Planung des Unterrichts, das methodische Vorgehen und der Einsatz von Unterrichtsmitteln werden wesentlich durch Vorkenntnisse und Lernstand der jeweiligen Klasse bestimmt. Die Hinweise zum Unterricht beschränken sich daher auf grundsätzliche Erläuterungen und Empfehlungen, deren Umsetzung an den vorliegenden Bedingungen auszurichten ist. Dazu gehört einerseits eine angemessene und gegebenenfalls differenzierte Gewichtung der in den Bildungsstandards beschriebenen Anforderungsbereiche bei der Auswahl und Entwicklung von Aufgaben

* <http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards>
LP-Saarland: GS/SPFS-Mathematik, 2005

für den Unterricht und die häusliche Nachbereitung. Andererseits sollten die Schüler zunehmend an der Variation und Formulierung von Aufgaben beteiligt werden.

Entscheidend für einen nachhaltigen Unterrichtserfolg ist individuelles Üben und Wiederholen in neuen Zusammenhängen. Die regelmäßige Bearbeitung entsprechender Hausaufgaben ist daher eine unverzichtbare Ergänzung der Unterrichtsarbeit, die mit der Erarbeitung fachlicher Kompetenzen zum Erwerb wesentlicher Qualifikationen für das berufliche und private Leben beitragen soll. Dies gilt sowohl für persönliche Arbeitshaltungen (Anstrengungsbereitschaft, Ausdauer, Gewissenhaftigkeit, Genauigkeit u.a.) als auch für metakognitive Kompetenzen (das Lernen betreffende Regeln und Techniken, auf tieferes Verständnis zielende Strategien). Soziale Kompetenzen (Bereitschaft und Fähigkeit zu Kommunikation und Kooperation, zur Übernahme von Verantwortung u.a.) sollen durch Perspektivenwechsel, das Verbalisieren eigener Gedanken und Handlungen, das Nachvollziehen der Gedanken anderer und den Austausch rationaler Argumente geübt werden.

LERNGEBIETSÜBERSICHT

Lfd. Nr.	Lerngebiet	Zeitrichtwert* Stunden
	Klassenstufe 10	
1	Modellieren mit Mengen und Zahlen Wahrscheinlichkeit von Ereignissen Grundlegende Elemente beschreibender Statistik	40
2	Geometrische Grundlagen Punktmengen in der Ebene Dreieck und Viereck Umfänge, Flächen- und Rauminhalte	80
3	Umgang mit Termen und Formeln	40
Summe		160
	Klassenstufe 11	
4	Beschreibung funktionaler Zusammenhänge	40
5	Problemlösungen mit Hilfe von Geraden	40
6	Problemlösungen mit Hilfe von Parabeln	40
7	Problemlösungen mit Hilfe von Potenzen	40
Summe		160

* Zeitrichtwert i.S. eines Vorschlags

Lerngebiet 1: Modellieren mit Mengen und Zahlen

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben alltägliche Situationen, die als Zufallsexperiment modelliert werden können.

Sie beschreiben und bestimmen die Ergebnis- und Ereignismengen von Zufallsexperimenten.

Sie benutzen grundlegende Begriffe und Gesetze der Mengenlehre zur Beschreibung von Ereignissen.

Sie veranschaulichen die Ergebnismengen mehrstufiger Zufallsexperimente durch Baumdiagramme.

Sie verwenden allgemeine Zählprinzipien zur systematischen Abzählung endlicher Mengen.

Sie definieren und berechnen die Laplace-Wahrscheinlichkeit von Ereignissen.

Sie beurteilen die Eignung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten zur Einschätzung von Chancen und Risiken in realen Situationen.

Lerninhalte

Grundbegriffe, Schreibweisen, Veranschaulichungen:

Element, Grundmenge, endliche und unendliche Menge, Teilmenge, Potenzmenge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Komplementärmenge, Produktmenge

Ergebnismenge, Ereignisse, verknüpfte Ereignisse

Laplace-Wahrscheinlichkeit bei endlichen Ergebnismengen

Summen- und Produktregel

Rechnen mit Brüchen und Prozenten

Hinweise

In diesem Lerngebiet werden elementare Gesetze der Mengenalgebra auf Ereignisse (Teilmengen der Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes) bezogen. Dabei geht es um die Fähigkeit, Problemsituationen in der Mengen- und Ereignissprache zu formulieren und die zur Lösung erforderlichen Zusammenhänge z.B. mit Hilfe von Venn-Diagrammen zu erkennen.

Die zur Abzählung endlicher Mengen und deren Verknüpfungen benötigten Zählprinzipien werden mit Hilfe von Venn-Diagrammen (Summenregel) bzw. an Baumdiagrammen (Produktregel) erarbeitet. Bei mehrstufigen Zählprozessen sollen die Schülerinnen und Schüler die jeweilige Problemsituation in ein geeignetes Modell (z.B. Wortmodell) übertragen und die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten mit Hilfe der Produktregel ermitteln können. Dabei genügt die Betrachtung von Situationen, die sich im Wortmodell wie folgt darstellen:

Anzahl der Wörter mit n gleichen bzw. verschiedenen Buchstaben

- auf einem Alphabet mit k verschiedenen Buchstaben,
- in denen der Buchstabe A k -mal und der Buchstabe B $(n - k)$ -mal vorkommt,
- in denen der Buchstabe A p -mal, der Buchstabe B q -mal und der Buchstabe C $(n - p - q)$ -mal vorkommt.

Zur Berechnung der k -Teilmengen einer n -Menge können die Binomialkoeffizienten eingeführt werden.

Die Definition, Problematik und Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei unendlichen Ergebnismengen mit Hilfe geometrischer Modelle wird zumindest am Beispiel von Glücksrädern erarbeitet.

Lerngebiet 1: Modellieren mit Mengen und Zahlen

Grundlegende Elemente beschreibender Statistik

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler erheben statistische Daten, erfassen sie in Tabellen und veranschaulichen diese in Säulendiagrammen.

Sie unterscheiden qualitative und quantitative Merkmale und stellen die Merkmalsausprägungen auf geeigneten Skalen dar.

Sie bestimmen relative Häufigkeiten und veranschaulichen ihre Verteilung in Kreisdiagrammen.

Sie zerlegen metrisch skalierte Merkmalsausprägungen in Klassen und veranschaulichen die Verteilung der relativen Häufigkeiten in Histogrammen.

Sie bestimmen arithmetisches Mittel und Median und beurteilen deren Eignung zur Kennzeichnung von Datenmengen.

Sie stellen die Streuung geeignet skalierten Datenmengen dar.

Sie interpretieren statistische Darstellungen.

Sie reflektieren und bewerten Aussagen, die sich auf statistische Darstellungen beziehen.

Lerninhalte

Grundbegriffe: Grundgesamtheit, Stichprobe, Merkmal, Merkmalsausprägung,

die Zahlenmengen \mathbb{N}^* , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} am Zahlenstrahl bzw. Zahlenspeer,

Anordnung von Zahlen, Vergleichszeichen: $=$, $<$, $>$, \leq , \geq

Betrag einer Zahl: $|a|$, Abstand zweier Zahlen: $|a - b|$

Intervalle, Intervalllängen

Zahlenverhältnisse

Skalen: Nominalskala, Ordinalskala, metrische Skalen: Intervall- und Proportional-skala

Kenngrößen: (gewichtetes) arithmetisches Mittel, Median

Spannweite, Quartile, Box-Plots

Rechnen mit Brüchen und Prozenten

Berechnung von Winkeln, Winkelmaß (Gradmaß), Winkelarten,

Winkel messen, zeichnen, übertragen, halbieren,

Scheitel- und Nebenwinkel

Flächeninhalte von Rechtecken

Hinweise

In diesem Lerngebiet werden die verschiedenen Aspekte des Zahlbegriffs im Zusammenhang mit der Erarbeitung grundlegender Begriffe der beschreibenden Statistik vervollständigt. Die Fähigkeit, diese Aspekte des Zahlbegriffs und die entsprechenden Skalen zu unterscheiden, ist wesentliche Grundlage für das sinnvolle Operieren und Argumentieren mit statistischen Daten. Das Erfassen und Darstellen von Datenmengen ist also kein Selbstzweck, kann daher auf wenige Beispiele beschränkt werden und sollte insbesondere bei der Berechnung von Kenngrößen stets von Überlegungen zum Zweck und zur Sinnhaftigkeit des jeweiligen Tuns begleitet sein. Andererseits sollte die sich bietende Gelegenheit, grundlegende Rechnungen und Vergleiche zu wiederholen und zu üben, den erkannten Erfordernissen entsprechend genutzt werden.

Besonders wichtig sind Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten in Medien vorgefundene statistische

Darstellungen interpretieren und aus ihnen abgeleitete Aussagen bewerten. Sie sollten auch nach Abschluss dieses Lerngebietes, ggf. in Verbindung mit anderen Unterrichtsfächern, immer wieder Gegenstand des Mathematikunterrichts sein.

Lerngebiet 2: Geometrische Grundlagen

Punktmenge in der Ebene

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler modellieren ebene geometrische Strukturen in der Umwelt durch ebene geometrische Figuren und Punktmenge.

Sie stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar und identifizieren die Punktmenge als Menge von Zahlenpaaren.

Sie messen und berechnen Streckenlängen und Punktabstände im Koordinatensystem.

Sie begründen die Erweiterung der Menge der rationalen zur Menge der reellen Zahlen mit der Forderung nach uneingeschränkter Messbarkeit von Streckenlängen.

Sie unterscheiden rationale von irrationalen Zahlen anhand ihrer dezimalen Darstellung.

Sie beschreiben und begründen Eigenschaften und Lagebeziehungen geometrischer Figuren und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen.

Sie erläutern und begründen die Ortslinieneigenschaften von Kreis, parallelen Geraden, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden und nutzen diese zur Lösung geometrischer Problemstellungen sowie zur Ausführung geometrischer Grundkonstruktionen.

Sie erläutern und begründen die Lage und Konstruktion des Um- und Inkeismittelpunktes eines Dreiecks durch Variation des Ortsliniengedankens.

Sie erkennen, beschreiben und begründen Zusammenhänge bezüglich der Winkel zwischen sich schneidenden Geraden sowie Parallelen, die von einer Geraden geschnitten werden.

Lerninhalte

Grundbegriffe und Bezeichnungen:

Punkt, Ebene, Strecke, Strahl, Gerade, Winkel, Kreis, Dreieck, Viereck
kartesisches Koordinatensystem, Einheitsstrecke, Längeneinheit, Länge einer Strecke, Abstand zweier Punkte, Abstand eines Punktes von einer Geraden, Quadratwurzel, Radikand, Quadratzahl, Menge der reellen Zahlen, Achsen- und Punktsymmetrie

Ortslinien und Variation des Ortslinienprinzips:

Kreis, parallele Geraden, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende im Dreieck, Umkreis und Inkreis

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

Mittelsenkrechte und Mittelpunkt einer Strecke, Lote und Parallelen zu gegebenen Geraden, Winkelhalbierende

Scheitel- und Nebenwinkel, Stufen und Wechselwinkel

Hinweise

Die rechnerische Ermittlung von Streckenlängen und Punktabständen im Koordinatensystem erfordert die Anwendung des erst später ausführlicher begründeten Satzes von Pythagoras. Problemorientierter Anwendung wird hier der Vorrang vor fachsystematischer Entwicklung gegeben, was angesichts der Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler vertretbar ist. Die damit verbundene Thematisierung des Wurzelbegriffs und die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung führen die im Lerngebiet 1 behandelten Aspekte des Zahlbegriffs fort.

Ausgehend vom Abstandsbegriff und der Ortslinieneigenschaft des Kreises werden die Eigenschaften und Konstruktionen von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden sowie resultierende Grundkonstruktionen entdeckend erarbeitet. Der Einsatz von Straßen- und Landkarten in Verbindung mit Problemstellungen und Planungsaufgaben zur Lage und Entfernung von Städten und Straßen wird empfohlen. Durch Variation der Ausgangsprobleme lassen sich die Erkenntnisse auf Dreiecke und Vierecke übertragen.

Insbesondere bei der Behandlung von Ortslinien und der Winkel an sich schneidenden Geraden bietet sich der Einsatz dynamischer Geometriesoftware an.

Lerngebiet 2: Geometrische Grundlagen

Dreieck und Viereck

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler analysieren und klassifizieren Dreiecks- und Vierecksarten.

Sie formulieren und begründen die Sätze über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, Viereck und Vieleck.

Sie beschreiben und begründen die Eigenschaften der Transversalen im Dreieck.

Sie formulieren und begründen den Satz des Thales.

Sie erläutern den Kongruenzbegriff und formulieren und begründen die Kongruenzsätze.

Sie konstruieren Dreiecke, auch mit Hilfe der Transversalen und des Satzes des Thales, untersuchen die Lösbarkeit und Lösungsvielfalt der Konstruktionsaufgaben und dokumentieren die Konstruktionsschritte.

Sie konstruieren Vierecke und Tangenten an Kreise.

Sie erkennen und charakterisieren ähnliche Dreiecke, formulieren und begründen den Satz über die Seitenlängenverhältnisse ähnlicher Dreiecke und wenden ihn bei der Lösung realitätsnaher Probleme an.

Sie formulieren und begründen die Sätze der Satzgruppe des Pythagoras und wenden sie bei der Lösung realitätsnaher Probleme an.

Sie erklären die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck und verwenden sie bei der Lösung realitätsnaher Probleme zur Ermittlung von Winkeln und Längenverhältnissen.

Lerninhalte

Dreiecks- und Vierecksarten

Winkelsumme im Dreieck, Viereck und Vieleck

Transversalen im Dreieck: Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Höhen

Satz des Thales

Kongruenzsätze und Dreieckskonstruktionen (auch unter Berücksichtigung der Transversalen), Konstruktionen von Tangenten an einen Kreis, Viereckskonstruktionen

Ähnliche Dreiecke: Satz über die Seitenlängenverhältnisse

Satzgruppe des Pythagoras: Höhensatz, Kathetensatz, Satz des Pythagoras \sin , \cos , \tan im rechtwinkligen Dreieck

Hinweise

Die Klassifikation der Drei- und Vierecke erfolgt auf der Grundlage der den Schülerinnen und Schülern weitgehend bekannten Bezeichnungen und Eigenschaften.

Das Entdecken der Innenwinkelsumme im Dreieck kann z.B. durch Abschneiden und Zusammenlegen der Ecken von Papierdreiecken erfolgen, an die sich die Begründung mit Hilfe des Satzes über Stufen- und Wechselwinkel anschließt. Die Übertragung auf Vier- und Vielecke beruht auf dem Prinzip des Zerlegens in Dreiecke, das bei Viereckskonstruktionen erneut aufgegriffen wird.

Bei der Erarbeitung der physikalischen Bedeutung der Seitenhalbierenden eines Dreiecks und ihres Schnittpunktes ist auf eine hinreichende Klärung des Begriffes "Schwerpunkt" und eine korrekte Begründung zu achten. In jedem Fall ist die Verwechslung von Seiten- und Flächenschwerpunkt eines Dreiecks zu vermeiden.

Für die entdeckende Erarbeitung der geometrischen Eigenschaften der Transversalen im Dreieck und des Satzes des Thales wird der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware empfohlen.

Zentrale Bedeutung besitzt der Satz über die Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke. Er ersetzt die Strahlensätze, dient zusammen mit dem Satz über Stufen- und Wechselwinkel zur Begründung des Höhen- und Kathetensatzes und gibt Anlass zur Definition der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck. Nach der Entwicklung dieser innermathematischen Zusammenhänge steht das Erkennen der geometrischen Figuren in realitätsnahen Problemsituationen und die Lösung der Probleme aufgrund der erkannten Gesetzmäßigkeiten im Vordergrund.

Lerngebiet 2: Geometrische Grundlagen

Umfänge, Flächen- und Rauminhalte

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln, beschreiben und bewerten Strategien zur Berechnung des Umfangs und Flächeninhaltes geradlinig begrenzter Figuren.

Sie bestimmen die Kreiszahl π sowie Umfang und Flächeninhalt eines Kreises durch ein geeignetes Näherungsverfahren.

Sie ermitteln die Länge von Kreisbögen sowie den Flächeninhalt von Kreisausschnitten, Kreisringen und zusammengesetzten Figuren.

Sie zeichnen Netze, Abwicklungen und Schrägbilder geometrischer Körper, berechnen Oberflächeninhalte und lösen räumliche Abstandsprobleme.

Sie berechnen Rauminhalte geometrischer Körper.

Sie erkennen, beschreiben und vereinfachen gegebenenfalls die geometrische Struktur von Objekten der Umwelt, stellen sie problembezogen zeichnerisch dar und berechnen Umfänge, Flächen- und Rauminhalte.

Lerninhalte

Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten

Umfänge von Dreiecken, Vierecken, Kreisbögen und zusammengesetzten Figuren

Flächeninhalte von Dreiecken, Vierecken, Kreisen, Kreisausschnitten, Kreisringen und daraus zusammengesetzten Figuren

Netze, Schrägbilder und Abwicklungen

Oberflächeninhalte und Rauminhalte von Prismen, Zylindern, Pyramiden, Kegeln, Kugeln und daraus zusammengesetzten Körpern

Hinweise

Ausgehend von der Fläche eines Rechteckes werden die Flächenformeln für das Parallelogramm, das Dreieck und das Trapez entwickelt. Der Flächeninhalt komplexerer Vielecke kann durch Zerlegung in Drei- und Vierecke sowie durch Anwendung der Trapezmethode im kartesischen Koordinatensystem bestimmt werden.

Das Zeichnen von Netzen, Abwicklungen und Schrägbildern, das Arbeiten mit Modellen und Umfüllexperimente zur Volumenbestimmung fördern das räumliche Vorstellungsvermögen und bilden die Grundlage für die Erarbeitung und Verbindung von Formeln.

Die gestellten Aufgaben sollten sich an alltäglichen oder berufspraktischen Situationen orientieren und eine Wiederholung und Anwendung des Satzes über die Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken, der Satzgruppe des Pythagoras und der trigonometrischen Funktionen in neuen Zusammenhängen ermöglichen.

Lerngebiet 3: Umgang mit Termen und Formeln

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler stellen Terme und Formeln zu gegebenen Prozessen und Sachverhalten auf.

Sie interpretieren Terme und Formeln und ordnen sie gegebenen Sachsituationen zu.

Sie untersuchen in Sachsituationen die Dimension von Termen, bestimmen geeignete Einheiten und führen Umrechnungen von Einheiten durch.

Sie beschreiben Termstrukturen nach Grundrechenarten und Prioritätsregeln.

Sie formen Terme zielgerichtet um, begründen die Umformungen mit Hilfe von Rechengesetzen und interpretieren das Ergebnis von Termumformungen.

Sie definieren Terme am Beispiel von Potenzen mit natürlichen Exponenten.

Lerninhalte

Grundbegriffe: Term, Summe, Summand, Produkt, Faktor

Subtraktion als Addition der Gegenzahl: Differenz, Minuend, Subtrahend

Division als Multiplikation mit dem Kehrwert: Quotient, Dividend, Divisor

Rechengesetze und Vorzeichenregeln der Addition und Multiplikation

Ordnen und Zusammenfassen von Termen

Addieren und Subtrahieren von Summen und Differenzen

Multiplizieren von Summen und Differenzen

Binomische Formeln

Faktorisieren durch Ausklammern (auch von Brüchen) und mit Hilfe der binomischen Formeln

Erweitern und Kürzen von Bruchtermen unter Beachtung ihres Definitionsbereiches

Addieren und Multiplizieren von Bruchtermen

Potenzen mit natürlichen Exponenten: Potenz, Basis, Exponent

Zehnerpotenzschreibweise von Zahlen

Hinweise

Dem Aufstellen und Interpretieren von Termen wird besonderes Gewicht beigemessen. Terme mit zwei oder mehr Variablen werden stets auf Sachsituationen bezogen.

Beispiele: Zinsterme, Verhältnisterme, arithmetisches Mittel, harmonisches Mittel, Abzählterme, Zahlenrätselsterme, Preis- und Kostenberechnungen, Umrechnung von Größen: Zeit, Masse, Geld, Temperatur, Geschwindigkeit, geometrische Größen, Berechnung prozentualer Veränderungen

Termumformungen sind kein Selbstzweck, d.h. das Ziel einer Termumformung ist zunächst zu klären.

Beispiele: Verringerung der Rechenschritte bei der Auswertung des Terms, Vereinfachung des Rechenwegs bei der Auswertung des Terms (eine bestimmte Variable soll nur einmal auftauchen), eine bestimmte Eigenschaft des Terms (z.B. das Vorzeichen) soll möglichst einfach erkannt werden können.

Die Beachtung dieser Hinweise und Auswahl der Beispiele soll das problembezogene mathematische Operieren in den folgenden Lerngebieten vorbereiten.

Lerngebiet 4: Beschreibung funktionaler Zusammenhänge

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler definieren den Funktionsbegriff, stellen Funktionen auf verschiedene Weisen dar und unterscheiden sie von anderen zweistelligen Relationen.

Sie erläutern anhand unterschiedlicher Darstellungen von Funktionen deren Umkehrbarkeit und Umkehrung.

Sie bestimmen anhand unterschiedlicher Darstellungen von Funktionen besondere Funktionseigenschaften.

Auf der Grundlage gegebener oder angenommener Gesetzmäßigkeiten und Eigenschaften ergänzen sie Wertetabellen und Graphen von Funktionen bzw. setzen diese fort.

Sie nutzen Funktionen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge von Größen und deren Veränderung.

Sie charakterisieren spezielle Funktionstypen und erläutern entsprechende Sachsituationen.

Lerninhalte

Definitionsmenge (-bereich), Zielmenge, Zuordnungsvorschrift

Schreibweise: $f: D \rightarrow Z, x \mapsto y = f(x)$, Wertemenge (-bereich): $W = f(D)$

Darstellungsformen für Funktionen:

verbale Beschreibung, Paarmenge, Pfeildiagramm, Wertetabelle, Graph, Term

Umkehrung von Funktionen

Funktionseigenschaften:

Monotonie, Beschränktheit, Achsen- und Punktsymmetrie, Periodizität, maximale Funktionswerte, durchschnittliche Steigung (Differenzenquotient)

Spezielle Funktionstypen:

$$f: [0; r] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = ax,$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = a/x, I \subset]0; \infty[$$

arithmetische und geometrische Folgen,

arithmetisches Mittel und geometrisches Mittel, Mittelwertungleichung

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(t) = a \sin(bt+c), I \subset \mathbb{R}$$

Hinweise

Die Bezeichnung der Funktionen und Variablen sollte den jeweils beschriebenen Sachsituationen entsprechen.

Beispiele: Aufgreifen von Beispielen aus Lerngebiet 3,

Füllhöhe $h(t)$ beim Befüllen bzw. Entleeren von Gefäßen,

s - t -Diagramme (graphische Fahrpläne), v - t -Diagramme

Die allgemeine Sinusfunktion wird als Prototyp einer periodischen Funktion zur Beschreibung der Seitenansicht einer Drehbewegung mit konstanter Drehzahl (harmonische Schwingung) erarbeitet.

Lerngebiet 5: Problemlösungen mit Hilfe von Geraden

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Geraden im kartesischen Koordinatensystem durch eine Gleichung $x = a$ bzw. $y = mx + b$ und wissen, dass die letztere Gleichung Zuordnungsvorschrift einer ganzrationalen Funktion 1. Grades (Geradenfunktion) ist.

Sie berechnen bei gegebener Geradengleichung Punkte einer Geraden, insbesondere die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, zeichnen die Gerade und überprüfen rechnerisch die Lage von Punkten bezüglich der Geraden.

Sie wissen, dass die Steigung zwischen zwei beliebigen Punkten des Graphen einer Geradenfunktion (Differenzenquotient) stets dieselbe und gleich dem Steigungsfaktor m ist.

Sie berechnen den Steigungsfaktor und den Steigungswinkel einer gegebenen Geradenfunktion.

Sie ermitteln rechnerisch bei bekannter Steigung eine Gleichung der Geraden durch einen gegebenen Punkt (z.B. Parallele und Lot).

Sie ermitteln rechnerisch eine Gleichung der Geraden durch zwei gegebene Punkte. Sie bestimmen rechnerisch und zeichnerisch die Schnittmenge und ggf. den Schnittpunkt und den Schnittwinkel zweier Geraden.

Sie lösen rechnerisch und zeichnerisch lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

Sie lösen zeichnerisch lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen.

Sie lösen geometrische Probleme in der Ebene mit Hilfe von Geradenfunktionen.

Sie beschreiben gleichförmige Zusammenhänge in Sachsituationen mit Hilfe von Geradenfunktionen sowie linearen Gleichungs- und Ungleichungssystemen mit zwei Variablen und geben ggf. problembezogene Definitionsbereiche an.

Sie formulieren und beantworten Fragen zu den beschriebenen Situationen.

Sie beurteilen die Eignung von Geradenfunktionen und der behandelten zeichnerischen und rechnerischen Verfahren zur Lösung konkreter Sachprobleme.

Lerninhalte

Geradengleichungen

Ganzrationale Funktionen 1. Grades (Geradenfunktionen)

Differenzenquotient, Steigungsfaktor, Steigungswinkel

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Ordinatenabschnitt, Nullstelle

Aufstellen und gezielte Umformung des Funktionsterms

Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Rechnerische und zeichnerische Lösung linearer Gleichungen und linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Zeichnerische Lösung linearer Ungleichungen und linearer Ungleichungssysteme mit zwei Variablen

Hinweise

In diesem Lerngebiet geht es zunächst um die analytische Lösung einfacher geometrischer Probleme im ebenen kartesischen Koordinatensystem.

Beispiele:

Mittelsenkrechte einer Strecke,

Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Höhen eines Dreiecks,

Höhenfußpunkte, Flächenschwerpunkt, Umkreismittelpunkt eines Dreiecks,

Abstand eines Punktes von einer Geraden,
Spiegelung eines Punktes an einer Geraden,
Bestimmung kürzester Wege in einfachen Situationen

Im Vordergrund stehen dann Probleme und Aufgaben, die sich auf gleichförmige Zusammenhänge, Prozesse und Bewegungen beziehen. Diese werden mit Hilfe von Geradenfunktionen beschrieben, durch Geraden im kartesischen Koordinatensystem veranschaulicht und durch problembezogene Operationen und Interpretationen gelöst.

Gegebenenfalls werden vorhandene Kenntnisse und bekannte Lösungsverfahren (z.B. Dreisatzrechnen) aufgegriffen, genutzt bzw. als Lösungsalternative diskutiert. Die Gültigkeit des Modells "Gerade" und die Zulässigkeit linearen Inter- und Extrapolierens wird an geeigneten (Gegen-)Beispielen erörtert.

Lerngebiet 6: Problemlösungen mit Hilfe von Parabeln

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben die Normalparabel im kartesischen Koordinatensystem durch die Gleichung $y = x^2$, wissen, dass diese Gleichung Zuordnungsvorschrift einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (quadratische Funktion) ist, und beschreiben die Eigenschaften dieser Funktion.

Sie beschreiben, wie der Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a(x + u)^2 + v$ aus der Normalparabel entsteht, und erläutern die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$.

Sie werten quadratische Funktionsterme aus, stellen sie graphisch dar und beschreiben ermittelte Funktionseigenschaften.

Sie bestimmen die zur Ermittlung besonderer Eigenschaften quadratischer Funktionen geeignete Form des Funktionsterms, formen den Funktionsterm ggf. um und geben die gesuchten Eigenschaften an.

Sie lösen rechnerisch und zeichnerisch quadratische Gleichungen.

Sie beschreiben Zusammenhänge in Sachsituationen mit Hilfe von quadratischen Funktionen sowie quadratischen Gleichungen und Ungleichungen und geben ggf. problembezogene Definitionsbereiche an.

Sie formulieren und beantworten Fragen zu den beschriebenen Situationen.

Sie lösen Sachprobleme (insbesondere Optimierungsprobleme) mit Hilfe von quadratischen Funktionen.

Sie beurteilen die Eignung von quadratischen Funktionen und der behandelten zeichnerischen und rechnerischen Verfahren zur Lösung konkreter Sachprobleme.

Lerninhalte

Quadratische Funktionen, Parabeln

Streckung, Spiegelung, vertikale und horizontale Verschiebung der Normalparabel

Eigenschaften: Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrieachse, Monotonieintervalle, Achsenschnittpunkte, Vorzeichen der Funktionswerte, Scheitelpunkt, Extrempunkte, ggf. Randwerte

Aufstellen und gezielte Umformung des Funktionsterms:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad y = a(x + u)^2 + v$$

$$y = a(x + u)^2 + v, \quad av < 0 \quad \rightarrow \quad y = a(x + r)(x + s)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a(x + u)^2 + v \\ y = a(x + r)(x + s) \end{array} \right\} \rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Quadratische Gleichungen

Hinweise

Zunächst lernen die Schülerinnen und Schüler die Parabel als Ortslinie jener Punkte kennen, die von einem festen gegebenen Punkt und einer festen gegebenen Geraden denselben Abstand haben. Verläuft die gegebene Gerade parallel zur x -Achse in einem kartesischen Koordinatensystem, so liefert die exemplarische Lösung der zur Beschreibung der Punkte aufgestellten Wurzelgleichung die Gleichung einer quadratischen Funktion.

Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich dann mit Problemen und Aufgaben, die sich auf Zusammenhänge beziehen, die mit Hilfe von quadratischen Funktionen beschrieben werden können. Dabei geht es vor allem um das Aufstellen des Funk-

tionsterms und ggf. nach einer zielgerichteten Umformung oder graphischen Darstellung um eine problembezogene Interpretation.

Zumindest exemplarisch werden Optimierungsprobleme bearbeitet, die anhand der Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion gelöst werden können.

Beispiele:

Parabel als Ortslinie,

Weg-Zeit-Diagramme, Wurfparabeln

Flächeninhalte ebener Figuren in Abhängigkeit von Streckenlängen,

Konsum in Abhängigkeit vom Einkommen,

Gewinn in Abhängigkeit vom Stückpreis (Nash-Gleichgewicht),

Summenterme arithmetischer Zahlenfolgen

Lerngebiet 7: Problemlösungen mit Hilfe von Potenzen

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler erkennen in konkreten Situationen Zusammenhänge, die durch Gleichungen mit Potenzen beschrieben werden können.

Sie begründen die Potenzgesetze und wenden sie zur Vereinfachung von Potenztermen an.

Sie modellieren exponentielle Wachstumsprozesse durch Gleichungen der Form $y = ab^n$ und stellen sie in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Sie extrapolieren exponentielle Wachstumsprozesse und definieren für positive Basen unter Beibehaltung der Potenzgesetze Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Sie interpolieren exponentielle Wachstumsprozesse, definieren für positive Basen unter Beibehaltung der Potenzgesetze Potenzen mit rationalen Exponenten und verallgemeinern den Wurzelbegriff.

Sie stellen kontinuierliche proportionale, reziprok proportionale, quadratische, kubische und exponentielle Zusammenhänge und Wachstumsprozesse durch Funktionen $y = f(x)$ und ihre Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Sie berechnen für die durch Funktionen $y = f(x)$ beschriebenen proportionalen, reziprok proportionalen, quadratischen, kubischen und exponentiellen Zusammenhänge die prozentuale Veränderung von y bei gegebener Änderung von x .

Sie unterscheiden die Eigenschaften gleichförmigen und exponentiellen Wachstums.

Sie definieren den Logarithmus und erläutern den Zusammenhang zwischen Potenz-, Wurzel- und Logarithmusbegriff sowie zwischen Potenz- und Logarithmusgesetzen.

Sie lösen Gleichungen der Form $y = ab^c$ nach a , b und c auf.

Sie beschreiben in konkreten Sachsituationen die Art des Wachstums bzw. der Veränderung einer Größe.

Sie formulieren und beantworten Fragen zu den beschriebenen Situationen.

Lerninhalte

Potenz-, Wurzel- und Logarithmusbegriff

Potenz-, Wurzel- und Logarithmusgesetze

Funktionen der Form

$$y = ax, y = ax^{-1}, y = ax^2, y = ax^3, y = ab^x$$

Funktionsgraphen, prozentuale Veränderung von y bei geg. Änderung von x

Gleichförmiges Wachstum $y(t) = y_0 + at$

Exponentielles Wachstum $y(t) = y_0 a^t$

Wachstumsrate, Wachstumsfaktor, Verdopplungs- und Halbwertszeit

Hinweise

Die Erweiterung des Potenzbegriffs auf Potenzen mit nicht natürlichen Exponenten wird durch die beim Extra- und Interpolieren kontinuierlicher exponentieller Wachstumsprozesse hinreichend motiviert. Die bei Fortgeltung der Potenzgesetze (Permanenzprinzip) notwendige Beschränkung auf positive Basen sollte an einem Beispiel begründet werden.

Bei der Modellierung von Wachstumsprozessen (Kapitalvermehrung, Bevölkerungswachstum usw.) sollte auch die Festlegung eines sinnvollen Definitionsbereiches problembezogen erörtert werden. Für die Gegenüberstellung von gleichförmigem

und exponentiellem Wachstum eignen sich Aufgaben aus der Zins- und Zinseszinsrechnung.

Im Rahmen der Erörterung proportionaler, reziprok proportionaler, quadratischer und kubischer Zusammenhänge kann vor allem die Berechnung geometrischer Größen wiederholt und durch neue Fragestellungen ergänzt werden.

Die Anwendung der Potenz- und Logarithmengesetze erfolgt problembezogen. Zur Festigung des Logarithmusbegriffes sollten Logarithmen zu verschiedenen Basen für geeignete Zahlen ohne Hilfsmittel bestimmt werden. Werden Exponentialgleichungen mit Hilfe von Logarithmengesetzen gelöst, empfiehlt sich die Verwendung des Zehnerlogarithmus. Auf die Bedeutung der Zahl e und auf den natürlichen Logarithmus kann im Zusammenhang mit dem Einsatz des Taschenrechners hingewiesen werden.