Lehrplan

Mathematik

Fachoberschule
Fachhochschulreifeunterricht in der Berufsschule

Ministerium für Bildung und Kultur

Trierer Straße 33
66111 Saarbrücken

Saarbrücken, Juli 2016

Hinweis:
Der Lehrplan ist online verfügbar unter
www.bildungsserver.saarland.de

Einleitende Hinweise

Dem vorliegenden Lehrplan für das Fach Mathematik in der Fachoberschule und im Fachhochschulreifeunterricht an Berufsschulen im Saarland liegen folgende Verordnungen zu Grunde:

- Verordnung – Schulordnung – über die Ausbildung an Fachoberschulen im Saarland vom 24. Juni 1986, zuletzt geändert am 6. Juli 2015
- Verordnung – Prüfungsordnung – über die staatliche Abschlussprüfung an den Fachoberschulen im Saarland (APO-FOS) vom 3. Juli 1981, zuletzt geändert am 19. Juli 2016
- Verordnung über den Fachhochschulreifeunterricht und die staatliche Abschlussprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife an Berufsschulen im Saarland vom 16. Juli 2014.

Der Lehrplan ist für alle Fachbereiche der Fachoberschule und des Fachhochschulreifeunterrichts an der Berufsschule verbindlich.

Die didaktische Leitidee hinter dem Lehrplan ist der kompetenzorientierte Unterricht unter der Berücksichtigung der Bildungsstandards nach Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK). In der Rahmenvereinbarung über Fachoberschulen (Beschluss der KMK vom 16.12.2004 i. d. F. vom 01.10.2010) wurden bislang keine Bildungsstandards für die Schulform Fachoberschule definiert. Bis zur Inkraftsetzung neuer Standards gelten die bestehenden Rahmenrichtlinien für das Fach Mathematik in der Fachoberschule (Beschluss der KMK vom 05.02.1976). Aus diesem Grund orientiert sich der vorliegende Lehrplan an den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.10.2012). Hiernach ist Mathematikunterricht so zu gestalten, dass die allgemeinen mathematischen Kompetenzen *mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* sowie *mathematisch kommunizieren* von den Schülerinnen und Schülern in der aktiven Auseinandersetzung mit Fachinhalten erreicht werden.

Das von der KMK gewählte Konzept der Bildungsstandards legt fest, welche fachbezogenen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Schullaufbahn entwickelt haben sollen. Unter einer Kompetenz wird dabei die Fähigkeit verstanden, Wissen und Können zur Lösung komplexer Problemstellungen anzuwenden. Da Kompetenzen aber nicht unterrichtet, sondern erworben werden, wird nach wie vor an Inhalten, vorzugsweise im handelnden Umgang mit diesen, gelernt. Aus diesem Grund enthält der Lehrplan neben den angestrebten Kompetenzen verbindliche Lerninhalte, die grundsätzlich in Zusammenhang mit den Kompetenzerwartungen stehen. Die verbindlichen Inhalte stellen den Mindestkatalog dar, der in dem vorgegebenen Zeitrahmen vermittelt werden muss. Es steht der Lehrkraft offen, weitergehende Inhalte zur Erreichung der angestrebten Kompetenzen zu behandeln. Des Weiteren enthält der Lehrplan Hinweise für eine mögliche unterrichtliche Umsetzung. Diese stellen Hilfen bei der didaktischen und methodischen Gestaltung des Unterrichts bereit und umreißen die Intensität der Beschäftigung mit den Inhalten.

Der anwendungsorientierte Unterricht, der in der Fachoberschule Vorrang hat, beschäftigt sich mit der Modellbildung und zielt auf ein tieferes Verständnis der Begriffe. Die Anwendung der Mathematik erschöpft sich daher nicht in der Abarbeitung mechanisch oder isoliert angeeigneter Verfahren oder Formeln, sondern erfordert die gedankliche Durchdringung des verwendeten Modells und der zugrundeliegenden Begriffe.

Die in der Fachoberschule angestrebte Studierfähigkeit erfordert in hohem Maße die Fähigkeit des selbstständigen Lernens. Neben dem Fachwissen setzt dies Fähigkeiten voraus, die häufig als Schlüsselqualifikationen bezeichnet werden. Sie umfassen zunächst persönliche Arbeitshaltungen (Anstrengungsbereitschaft, Ausdauer, Gewissenhaftigkeit, Genauigkeit u. a.) und metakognitive Kompetenzen (das Lernen betreffende Regeln und Techniken, Heuristiken, vor allem aber auf tieferes Verständnis zielende Strategien wie z. B. das Variieren von Problemen und Aufgaben). Zu ihrer Vermittlung kann und soll der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag leisten – nicht durch sporadische Hinweise und Exkurse, sondern durch regelmäßige Beachtung bei der Erarbeitung fachspezifischer Inhalte. Gleiches gilt für die Vermittlung sozialer Kompetenzen (Bereitschaft und Fähigkeit zu Kommunikation und Kooperation, zur Übernahme von Verantwortung, u. a.), wenn Perspektivenwechsel, das Verbalisieren eigener Gedanken und Handlungen, das Nachvollziehen der Gedanken anderer und der Austausch rationaler Argumente geübt werden.

Insbesondere die unterschiedlichen Vorbildungen und vereinzelt langjährigen Unterbrechungen des schulischen Bildungsweges der Schülerinnen und Schüler stellen eine Herausforderung für eine verantwortungsvolle Umsetzung des Lehrplans dar. Der Mathematikunterricht in der Klassenstufe 11 dient daher der Herstellung einer gemeinsamen Basis für die neu zusammengesetzten Lerngruppen, der Sicherung und Anwendung der bisherigen Kenntnisse sowie der Orientierung auf die Inhalte und Arbeitsformen der Fachoberschule. Eine reine Wiederholung von Inhalten, die bereits zum Abschlussprofil des Mittleren Bildungsabschlusses gehören, ist hier nicht gemeint. Es geht um das Aufgreifen von Inhalten, die in neuen, anregenden Kontexten wiederholt geübt, angewendet und vertieft werden.

Für die erfolgreiche Aufnahme eines Studiums sind für alle Fachbereiche gemeinsame und je nach Fachbereich zum Teil unterschiedliche mathematische Inhalte erforderlich. Der vorliegende Lehrplan sieht aus diesem Grund für die Klassenstufe 12 gemeinsame Lerngebiete sowie fachbereichsspezifische Lerngebiete vor.

Die zeitliche Abfolge der einzelnen Lerngebiete ist als Empfehlung zu verstehen, da die Lerngebiete sowohl aufeinander aufbauen als auch untereinander vernetzt sind. Die Lerngebiete bzw. Lerninhalte können ebenso in einer anderen, sachlogischen Reihenfolge vermittelt werden.

Die Zeitrichtwerte sind als Jahresstunden ausgewiesen und als zeitliche Empfehlungen zu verstehen. Nicht ausgewiesen sind Stundenanteile für Wiederholungen, Leistungsüberprüfungen, Unterrichtsausfall usw. Die Lehrplankommission hat diese Anteile berücksichtigt, indem neuer Lernstoff nur in einem zeitlichen Umfang von ca. zwei Drittel aufgenommen wurde.

Saarbrücken, im Juli 2016

Übersicht über die Lerngebiete

Klassenstufe 11

Lfd. Nr.	**Lerngebiete**	**Zeitrichtwert in Std.**
1	Rechnen in $\mathbb{R}$	8
2	Lineare Terme, Gleichungen und Ungleichungen	10
3	Funktionale Zusammenhänge	8
4	Geradenfunktionen	14
5	Quadratische Terme, Gleichungen und Ungleichungen	8
6	Quadratische Funktionen	16
7	Bruchterme, Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	8
8	Potenzfunktionen	8
Summe:		**80**

Klassenstufe 12

Lfd. Nr.	**Lerngebiete**	**Zeitrichtwert in Std.**
9	Ganzrationale Funktionen	16
10	Grenzwert und Stetigkeit	12
11	Differentiation ganzrationaler Funktionen	12
12	Diskussion ganzrationaler Funktionen	44
13	Integration ganzrationaler Funktionen	24
14	Exponentialfunktionen	24
15	Trigonometrische Funktionen	24
16	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$	84
17	Finanzmathematische Modelle	68
18	Grundlagen beschreibender Statistik	28
Summe FOS I:		**240**
Summe FOS W:		**200**
Summe FOS D, E+H, G+S:		**160**

	Fachoberschule Fachbereich Ingenieurwesen (FOS I)
	Fachoberschule Fachbereich Wirtschaft (FOS W)
	Fachoberschule Fachbereich Design (FOS D)
	Fachoberschule Fachbereich Ernährung und Hauswirtschaft (FOS E+H)
	Fachoberschule Fachbereich Gesundheit und Soziales (FOS G+S)

Lerngebiet 1: Rechnen in $\mathbb{R}$

Zeitrichtwert: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler erläutern Aufbau und Struktur der Zahlenmengen und wenden die Rechengesetze zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme an.

Die Schülerinnen und Schüler

- begründen die Notwendigkeit der Zahlenbereichserweiterungen,
- beschreiben die Zahlenmengen und ihre Beziehungen zueinander,
- führen Rechenoperationen unter Verwendung der Fachsprache durch,
- nutzen die Rechengesetze zum Lösen von kontextbezogenen Aufgaben.

Lerninhalte

- Darstellung der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (aufzählend, beschreibend, auf der Zahlengeraden, in Mengenschreibweise)
- Beziehungen zwischen den Zahlenmengen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Gegenzahl und Betrag einer Zahl
- Intervallschreibweise von Teilmengen
- Dichtheit von $\mathbb{Q}$
- Fachbegriffe der Grundrechenarten
- Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation
- Distributivgesetz
- Vorzeichenregeln
- Prioritätenregel (u. a. Punkt vor Strichrechnung)
- Nullproduktsatz
- Bruchrechnung

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Bei der Behandlung der Zahlenmengen können die wichtigsten Symbole, Schreibweisen und Operationen der Mengenlehre erklärt werden.
- Die Erkenntnis, dass man sich im Bereich der rationalen Zahlen jeder Zahl beliebig nah annähern kann, wird bei der Behandlung von Grenzwerten in der Oberstufe in anderem Kontext erneut aufgegriffen.

Lerngebiet 2: Lineare Terme, Gleichungen und Ungleichungen
Zeitrichtwert: 10 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln lineare Terme, Gleichungen und Ungleichungen, erfassen deren Struktur, formen sie zielgerichtet um, um schließlich inner- und außermathematische Sachverhalte zu lösen.

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben inner- und außermathematische Sachverhalte, indem sie aus gegebenen Bedingungen Terme aufstellen,
- formen Terme auf der Grundlage der Rechenregeln zielgerichtet um,
- charakterisieren Terme im Hinblick auf die Reihenfolge der Äquivalenzumformung von Gleichungen,
- beschreiben inner- und außermathematische Sachverhalte, indem sie aus gegebenen Bedingungen lineare Gleichungen und Ungleichungen aufstellen,
- nutzen Strategien unter Verwendung von Äquivalenz- und Termumformungen, um lineare Gleichungen und Ungleichungen zu lösen,
- geben zu vorgegebenen Termen bzw. Gleichungen passende inner- und außermathematische Sachverhalte an.

Lerninhalte

- Begriffe: Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge, Term, Gleichung, Ungleichung
- Charakterisierung von Termen (Summe, Produkt, Quotient usw.)
- Rechenregeln zum Umformen von Termen: Reihenfolge der Rechenoperationen, Kommutativ- und Assoziativgesetz, Distributivgesetz (Ausmultiplizieren und Ausklammern)
- Abgrenzung Termumformung – Äquivalenzumformung
- Grundregeln für Vorzeichenuntersuchung von Produkten
- Vorzeichendiagramm

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Voraussetzung für das Lösen jeder Gleichung ist die Charakterisierung der zugrundeliegenden Terme. Nur wer in der Lage ist die Art eines Terms zu benennen wird eine entsprechende Gleichung durch Äquivalenzumformungen lösen können.
- Eine mögliche, einheitliche Strategie zum Lösen aller rationaler Gleichungen und Ungleichungen besteht im Faktorisieren in Linearfaktoren und Ablesen der Nullstellen bzw. der Vorzeichenuntersuchung des Produktes ggf. mithilfe des Vorzeichendiagramms. Diese Strategie dient als Vorübung für die Untersuchungen rationaler Funktionen.
- Inner- und außermathematische Beispiele zum Aufstellen und Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen:
  Betragsgleichungen und Betragsungleichungen, Dreiecksungleichung, Zahlenrätsel, Durchschnittsgeschwindigkeit, Mischungsrechnen usw.

Lerngebiet 3: Funktionale Zusammenhänge

Zeitrichtwert: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler erläutern verschiedene Darstellungsformen von Relationen und funktionalen Zusammenhängen und wenden diese zur Beschreibung inner- und außermathematischer Problemstellungen an. Sie werten gegebene Relationen und Funktionen aus und interpretieren diese.

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen inner- und außermathematische Relationen in unterschiedlichen Darstellungsformen dar, vergleichen und interpretieren sie,
- identifizieren Funktionen als Sonderformen der Relationen,
- unterscheiden bei gegebenen funktionalen Abhängigkeiten zwischen Argument und Funktionswert,
- bestimmen die maximale Definitions- und Wertemenge einer gegebenen Funktion und begründen situationsangemessen,
- beschreiben charakteristische Eigenschaften anhand der graphischen Darstellung.

Lerninhalte

- Darstellungsformen von Relationen und Funktionen:
    - Pfeildiagramm
    - Wertetabelle
    - Schaubild
    - Graph im Koordinatensystem
    - Zuordnungsvorschrift
    - Funktionsterm und Funktionsgleichung
- Argument und Funktionswert
- Definitionsmenge und Wertemenge
- einfache Symmetrie, Monotonie und Beschränktheit

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Behandlung funktionaler Zusammenhänge und Relationen soll anhand geeigneter Anwendungsbeispiele aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler erfolgen. Insbesondere eignen sich hier das Skizzieren von Füllgraphen verschiedener Gefäße, der funktionale Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt eines Dreiecks und dessen Grundseite sowie der funktionale Zusammenhang zwischen dem Volumens eines Zylinders und dessen Radius.

Lerngebiet 4: Geradenfunktionen

Zeitrichtwert: 14 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler nutzen die unterschiedlichen Darstellungsformen der Geradenfunktionen, um entsprechende inner- bzw. außermathematische Problemstellungen zu erfassen und zu lösen. Sie stellen Geradenfunktionen auf, untersuchen deren Eigenschaften sowie die Lage von Geraden zueinander.

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden situationsangemessen unterschiedliche Darstellungsformen von Geradenfunktionen,
- stellen aus gegebenen Bedingungen die Funktionsgleichung auf,
- untersuchen Geradenfunktionen auf lokale und globale Eigenschaften,
- untersuchen und beschreiben Lage-Beziehungen von Geraden,
- lösen lineare Gleichungssysteme und begründen die Wahl des Lösungsverfahrens,
- geben Sachsituationen zu linearen Gleichungssystemen an,
- lösen inner- und außermathematische Probleme mithilfe von Geradenfunktionen,
- begründen, dass die Differenzfunktion zweier Geradenfunktionen wieder eine Geradenfunktion ist,
- untersuchen Betragsfunktionen auf lokale und globale Eigenschaften.

Lerninhalte

- Arten von Geradenfunktionen (konstante Funktionen, lineare Funktionen)
- Steigungsfaktor, Differenzenquotient, Steigungswinkel
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Funktionstermbestimmung
- Parallele und orthogonale Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden
- Verknüpfung von Funktionen (z. B. Differenzfunktion)
- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- Additionsverfahren, Einsetzungsverfahren
- Umkehrfunktion streng monotoner Geradenfunktionen
- Betragsfunktionen

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Behandlung der Geradenfunktionen sollte sich nicht auf innermathematische Beispiele beschränken sondern reale Sachzusammenhänge wie graphischer Fahrplan (als abschnittsweise definierte Funktion), Kennlinien, Tarifvergleiche, Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen, Skalenumrechnung, Zinsrechnung usw. einbeziehen.

- Die Bedeutung der Paramater in der Funktionsgleichung

  $$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto |a(x-b)| + c, \quad a,b,c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

  kann ausgehend von der Betragsfunktion erstmalig durch Verschiebung, Streckung und Stauchung im Koordinatensystem erarbeitet werden. Dieses Verfahren lässt sich als Grundprinzip auf alle folgenden Funktionstypen übertragen. In Abgrenzung hierzu empfiehlt sich die Überführung der Betragsfunktion in eine abschnittsweise definierte Funktion.

- Bei der Behandlung von Funktionen bietet sich grundsätzlich der Einsatz von Funktionsplottern an. Neben der Nutzung fest installierter Rechner können hierzu auch Mobilgeräte sinnvoll eingesetzt werden.

Lerngebiet 5: Quadratische Terme, Gleichungen und Ungleichungen

Zeitrichtwert: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler stellen zu realen Problemstellungen quadratische Gleichungen und Ungleichungen auf und wenden Strategien zum Lösen dieser Gleichungen und Ungleichungen an.

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Distributivgesetz zur Multiplikation von Summen sowie zur Herleitung der Binomischen Formeln,
- begründen die binomischen Formeln geometrisch,
- verwenden die Binomischen Formeln zum Ausmultiplizieren und Faktorisieren von Summen,
- beschreiben inner- und außermathematische Sachverhalte, indem sie aus gegebenen Bedingungen quadratische Gleichungen und Ungleichungen aufstellen,
- wenden Strategien zum Lösen von quadratischen Gleichungen und Ungleichungen an.

Lerninhalte

- Multiplikation von Summen
- Binomische Formeln
- Faktorisierung quadratischer Summen
- Quadratische Ergänzung vs. p-q-Formel
- Vorzeichendiagramm

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Anwendungsbeispiele:
  Zahlenrätsel, Strecken-, Flächen- und Volumenberechnung, Entfernungs- und Geschwindigkeitsbestimmung, Kapitalverzinsung, Brennweitenbestimmung einer Sammellinse, Strahlensatz usw.
- Die in Lerngebiet 2 erwähnte einheitliche Strategie zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen kann hier erneut angewendet werden.

Lerngebiet 6: Quadratische Funktionen Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden
Kompetenzen **Die Schülerinnen und Schüler untersuchen quadratische Funktionen auf charakteristische Merkmale und Eigenschaften, stellen Funktionsgleichungen auf und beurteilen ihre Ergebnisse in Sachzusammenhängen.** Die Schülerinnen und Schüler • verwenden situationsangemessen unterschiedliche Darstellungsformen quadratischer Funktionen, • untersuchen quadratische Funktionen auf lokale und globale Eigenschaften, • untersuchen Lage-Beziehungen von Parabeln, • bestimmen die Umkehrfunktion einer quadratischen Funktion unter Einschränkung des Definitionsbereiches, • stellen eine Funktionsgleichung aus gegebenen Bedingungen auf, • lösen lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten, • lösen inner- und außermathematische Probleme mithilfe von quadratischen Funktionen.
Lerninhalte • Normalparabel • Bedeutung des Formfaktors (Leitkoeffizient) • Scheitelpunktform, Nullstellenform, allgemeine Funktionsgleichung • Nullstellen und Ordinatenabschnitt bzw. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen • Wurzelfunktion als Umkehrfunktion • Schnittpunkte von Funktionen (Parabeln und Geraden) • Verknüpfung von Funktionen (z. B. Differenzfunktion) • Funktionstermbestimmung • Extremwertprobleme
Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung
• Beispiele für inner- und außermathematische Probleme: über- und unterproportionale Entwicklung der Funktionswerte, parabelförmige Brücken, parabelförmiger Wurf, Erlös- und Gewinnfunktionen • Der Scheitelpunkt kann zusätzlich mit den beiden folgenden, alternativen Ansätzen bestimmt werden: Berechnung der x-Koordinate des Scheitelpunktes durch Ausnutzung der Symmetrie der Nullstellen zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt; Berechnung der y-Koordinate des Scheitelpunktes durch Verschiebung des Graphen in y-Richtung um den unbekannten Wert y_s, so dass der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt. Da die Diskriminante nun den Wert Null hat, kann y_s berechnet werden. • Es ist sinnvoll Änderungen der Parameter $a, b, c \in \mathbf{R}$ der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a(x-b)^2 + c$ mithilfe eines Funktionsplotters zu untersuchen.

Lerngebiet 7: Bruchterme, Bruchgleichungen und Bruchungleichungen
Zeitrichtwert: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler stellen zu realen Problemstellungen Bruchgleichungen und Bruchungleichungen auf und nutzen Strategien der Äquivalenz- und Termumformung zur Lösung dieser Gleichungen bzw. Ungleichungen.

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben inner- und außermathematische Sachverhalte, indem sie aus gegebenen Bedingungen Bruchterme aufstellen,
- formen Bruchterme auf der Grundlage der Rechenregeln zielgerichtet um,
- beschreiben inner- und außermathematische Sachverhalte, indem sie aus gegebenen Bedingungen Bruchgleichungen und Bruchungleichungen aufstellen,
- nutzen Strategien unter Verwendung von Äquivalenz- und Termumformungen, um Bruchgleichungen und Bruchungleichungen zu lösen.

Lerninhalte

- Definitionsmenge
- Kürzen und Erweitern
- Addition und Subtraktion
- Multiplikation und Division
- Lösen einfacher Bruchgleichungen
- Lösen einfacher Bruchungleichungen mithilfe des Vorzeichendiagramms

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Anwendungsbeispiele für einfache Bruchgleichungen und Bruchungleichungen:
  Verteilungsprobleme, Stückkosten, Strahlensatz, Brennweitenbestimmung bei optischen Sammellinsen, Parallelschaltung elektrischer Widerstände usw.

Lerngebiet 8: Potenzfunktionen

Zeitrichtwert: 8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler leiten die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten her und wenden sie zur Vereinfachung und Umformung von Potenz- und Wurzeltermen an. Sie definieren die allgemeine Potenzfunktion und untersuchen deren Eigenschaften in Abhängigkeit des Exponenten.

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern die Definition der Potenz und leiten die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten her,
- übertragen die Potenzgesetze unter Verwendung des Permanenzprinzips auf Potenzen mit ganzzahligen Exponenten und formulieren damit verbundene Definitionen und Einschränkungen bzgl. der Basis-Grundmenge,
- nutzen die Definition der Quadratwurzel einer Zahl, um die Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auf Potenzen mit rationalen Exponenten zu übertragen und damit verbundene Definitionen und Einschränkungen zu formulieren,
- wenden die Potenzgesetze zur Umformung und Vereinfachung von Potenz- und Wurzeltermen an,
- definieren die Potenzfunktion und untersuchen in Abhängigkeit der Exponenten die Eigenschaften der resultierenden Funktionstypen,
- erläutern die Auswirkungen der Parameter in der Funktionsgleichung der allgemeinen Hyperbelfunktion auf den Verlauf des Graphen und umgekehrt.

Lerninhalte

- Definition einer Potenz
- Rechengesetze und Grundregeln für Potenzen
- Definition der Quadratwurzel
- Potenzen mit rationalen Exponenten
- teilweises Radizieren
- unter-die-Wurzel-Ziehen
- Rationalmachen des Nenners
- ~~allgemeine~~ Potenzfunktion $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto x^k$ mit $k\in\mathbf{Z}$
- Potenzfunktionen mit $k\in\mathbf{N}$
  - Parabeln der Ordnung k
  - einfache Symmetrie
  - Verhalten im Unendlichen
- Potenzfunktionen mit $k\in\mathbf{Z}^-$
  - Hyperbeln
  - Polstellen und senkrechte Asymptote
  - Verhalten im Unendlichen und waagerechte Asymptote

- allgemeine Hyperbelfunktion

  $f: \mathbf{R} \setminus \{b\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{a}{(x-b)^k} + c$ mit $a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ k \in \mathbf{N}^*$

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Ausgehend von den Definitionen $a^1 := a$ und $a^n := a \cdot \dots \cdot a$ (n Faktoren bei $n \geq 2$) mit $a \in \Box$ und der Definition der Quadratwurzel können die Rechengesetze und Grundregeln für natürliche, ganzzahlige und rationale Exponenten unter Anwendung des Permanenzprinzips wie folgt erarbeitet werden:
  - Für $a, b \in \mathbf{R}$ und $m, n \in \mathbf{N}$ gilt:

    $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

  - Mit $a^0 := 1$, falls $a \neq 0$ und aus $a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$ folgt dann für $a \in \Box^*$ und $n \in \Box$:

    $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
  - Mit $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$ für $a \in \mathbf{R}_0^+$ folgt für $a \in \mathbf{R}_0^+,\ n \in \mathbf{N}^*$:

    $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ sowie $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- Durch Verschiebung, Streckung und Stauchung der Grund-Hyperbeltypen

  $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ und $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

  können, in Analogie zur Betragsfunktion und quadratischen Funktion, die Funktionsgleichung sowie die Eigenschaften der allgemeinen Hyperbelfunktion erarbeitet werden.

Lerngebiet 9: Ganzrationale Funktionen

Zeitrichtwert: 16 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen ganzrationale Funktionen auf charakteristische Eigenschaften und skizzieren qualitativ deren Funktionsgraphen. Im Rahmen inner- bzw. außermathematischer Problemstellungen bestimmen sie aus gegebenen Graphen bzw. Eigenschaften die Funktionsgleichung.

Die Schülerinnen und Schüler

- modellieren Anwendungssituationen mit ganzrationalen Funktionen unter Angabe einer passenden Definitionsmenge,
- identifizieren ganzrationale Funktionen und bestimmen ihren Grad,
- untersuchen ganzrationale Funktionen auf einfache Symmetrie,
- bestimmen anhand des Funktionsterms das Verhalten im Unendlichen,
- ermitteln die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und geben die Vielfachheit der Nullstellen an,
- erläutern, dass eine ganzrationale Funktion vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen besitzt,
- skizzieren qualitativ den Funktionsgraphen einer ganzrationalen Funktion,
- stellen zu einem gegebenen Funktionsgraphen oder aus bekannten Eigenschaften den Funktionsterm auf.

Lerninhalte

- Definition einer ganzrationalen Funktion vom Grad n (Polynomfunktion n-ten Grades)
- Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse sowie Punktsymmetrie zum Ursprung
- Verhalten im Unendlichen
- Ordinatenabschnitt
- Nullstellen einschließlich ihrer Vielfachheit
- maximale Anzahl von Nullstellen
- Faktorisieren des Funktionsterms
- Abspalten von Linearfaktoren durch Polynomdivision sowie mithilfe des Hornerschemas
- Funktionstermbestimmung

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Einführung ganzrationaler Funktionen höheren Grades sollte anhand geeigneter Anwendungsbeispiele aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler erfolgen. Zum Beispiel die Produktionsfunktion aus der volkswirtschaftlichen Produktionstheorie oder die Beschreibung des Volumens einer Schachtel in Abhängigkeit der Höhe, wobei die Schachtel aus einem rechteckigen Blech mit bekannten Abmessungen gefertigt wird.

Lerngebiet 10: Grenzwert und Stetigkeit

Zeitrichtwert: 12 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Grenzwertbegriff. Sie wenden diesen für ganzrationale Funktionen und abschnittsweise definierte Funktionen an. Sie beurteilen mithilfe des Grenzwertes die lokale Stetigkeit von Funktionen und treffen Aussagen über die globale Stetigkeit dieser und verknüpfter Funktionen. Sie erläutern den Zwischenwertsatz und leiten daraus Aussagen über die Existenz von Nullstellen innerhalb gegebener Intervallgrenzen her.

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben das Verhalten der Funktionswerte von Funktionen bei links- und rechtsseitiger Annäherung der Argumente an eine Stelle x_0,
- definieren die Begriffe linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert und Grenzwert der Funktion für x gegen x_0,
- definieren den Begriff des uneigentlichen Grenzwerts,
- nutzen die Grenzwertsätze um die Grenzwerte von Funktionen und verknüpfter Funktionen zu ermitteln,
- ermitteln die Grenzwerte an Definitionslücken von Funktionen und Nahtstellen abschnittsweise definierter Funktionen,
- definieren die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 (lokale Stetigkeit) zunächst anschaulich und formulieren die mathematischen Stetigkeitsbedingungen,
- unterscheiden zwischen lokaler und globaler Stetigkeit und erläutern die Stetigkeit an Rändern offener und geschlossener Intervalle,
- beweisen aus den Grenzwertsätzen die Stetigkeit verknüpfter stetiger Funktionen,
- untersuchen Funktionen, insbesondere abschnittsweise definierte Funktionen, auf Stetigkeit,
- erläutern mithilfe der Stetigkeit auf geschlossenen Intervallen den Zwischenwertsatz und leiten daraus unter Einbeziehen der Vorzeichenbetrachtung der Funktion den Nullstellensatz her,
- weisen mithilfe des Nullstellensatzes nach, ob eine Funktion auf einem vorgegebenen Intervall mindestens eine Nullstelle besitzt,
- erläutern, dass eine auf einem geschlossenen Intervall stetige Funktion einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzt.

Lerninhalte

- Grenzwert einer Funktion f an einer Stelle x_0:
  Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen x_0, wenn die Funktionswerte beliebig nahe bei g liegen, falls die Argumente hinreichend nahe bei x_0 liegen.
  Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$
- links- und rechtsseitiger Grenzwert
- Uneigentlicher Grenzwert

- Grenzwertsätze
- Definition der lokalen Stetigkeit
- lokale und globale Stetigkeit
- Stetigkeit verknüpfter stetiger Funktionen
- Zwischenwertsatz
- Nullstellensatz
- Satz vom Minimum und Maximum

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Im Vordergrund steht eine anschauliche Erarbeitung der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit mit dem Ziel, dass Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erfasst werden. Dazu sollte zunächst das Verhalten von Funktionsgraphen bei Annäherung der Argumente an eine Stelle x_0 graphisch untersucht und Funktionswerte mithilfe einer Tabellenkalkulation berechnet werden.

Lerngebiet 11: Differentiation ganzrationaler Funktionen
Zeitrichtwert: 12 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen anhand realer Problemstellungen durchschnittliche und momentane Änderungsraten ganzrationaler Funktionen. Sie definieren die Ableitung einer Funktion an einer Stelle sowie die Ableitungsfunktion und interpretieren diese situationsbezogen.

Die Schülerinnen und Schüler
- bestimmen durchschnittliche und momentane Änderungsraten ganzrationaler Funktionen,
- erläutern den Begriff der Differenzierbarkeit an geeigneten Beispielen und verwenden ihn zur Definition der Ableitungsfunktion,
- formulieren die Ableitungsregeln und wenden diese an,
- definieren und ermitteln Ableitungsfunktionen höherer Ordnung,
- zeichnen die Graphen von Ableitungsfunktionen zu gegebenen Funktionsgraphen qualitativ und erklären die Zusammenhänge,
- interpretieren die Graphen von Ableitungsfunktionen und ziehen Rückschlüsse auf das Monotonieverhalten der zugehörigen Stammfunktionen,
- stellen die Funktionsgleichung der Tangente und Normale einer Funktion an einer Stelle auf.

Lerninhalte
- Sekantensteigung (Differenzenquotient) als durchschnittliche Änderungsrate
- Tangentensteigung (Differenzialquotient) als momentane Änderungsrate
- Ableitung einer Funktion an einer Stelle
- Differenzierbarkeit
- Ableitungsfunktion
- Ableitungsregeln: Potenz-, Faktor-, Summen-, Produkt- und Kettenregel
- höhere Ableitungen
- Zusammenhang zwischen Graph der Funktion und Graph der Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale an einer Stelle der Funktion

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung
- Der Einstieg in die Differentialrechnung sollte anhand geeigneter Anwendungsbeispiele aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler erfolgen, wie zum Beispiel der Untersuchung von Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit beim freien Fall, der durchschnittlichen Kostensteigerung und Grenzkosten eines Betriebes oder der durchschnittlichen und momentanen meteorologischen Temperaturzunahme.
- Zur Vervollständigung der Ableitungsregeln kann die Quotientenregel anhand der im LG 8 eingeführten gebrochenrationalen Funktionen behandelt werden.

Lerngebiet 12: Diskussion ganzrationaler Funktionen
Zeitrichtwert: 44 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen ganzrationale Funktionen auf charakteristische Merkmale und Eigenschaften, stellen Funktionsgleichungen auf und beurteilen ihre Ergebnisse in Sachzusammenhängen.

Die Schülerinnen und Schüler

- bilden unter Anwendung der Differentiationsregeln die ersten drei Ableitungsfunktionen,
- bestimmen das Monotonieverhalten einer Funktion, indem sie das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitungsfunktion untersuchen,
- unterscheiden notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen,
- untersuchen eine auf einem Intervall definierte Funktion auf lokale und globale Extrempunkte,
- erläutern den Unterschied zwischen Sattel- und Extrempunkt,
- bestimmen das Krümmungsverhalten einer Funktion, indem sie das Vorzeichen der zweiten Ableitungsfunktion untersuchen,
- formulieren notwendige und hinreichende Bedingungen für Wendestellen,
- bestimmen die Funktionsgleichungen von Wendetangenten,
- untersuchen zwei ganzrationale Funktionen auf Schnittpunkte,
- untersuchen ganzrationale Funktionen im Hinblick auf die genannten Kriterien in Bezug auf Realsituationen und interpretieren ihre Ergebnisse situationsgerecht,
- stellen aus gegebenen Eigenschaften einer ganzrationalen Funktion die Funktionsgleichung auf.

Lerninhalte

- Monotonieverhalten und Monotonieintervalle
- notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremstellen
- lokale und globale Hoch- und Tiefpunkte
- Sattelpunkt
- Krümmungsverhalten und Krümmungsintervalle
- notwendige und hinreichende Bedingungen für Wendestellen
- Wendetangente ~~und Wendenormale~~
- Berührpunkt von Funktionen
- Aufstellen von Funktionsgleichungen

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Da die Vorzeichenuntersuchung der ersten und zweiten Ableitung die Grundlage für die Kurvendiskussion ist, kommt dem Vorzeichendiagramm eine besondere Bedeutung zu.

- Sowohl die Analyse als auch die Funktionstermbestimmung ganzrationaler Funktionen sollte sich nicht auf innermathematische Beispiele beschränken sondern reale Sachzusammenhänge einbeziehen.

Lerngebiet 13: Integration ganzrationaler Funktionen
Zeitrichtwert: 24 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln durch die rückwärtige Anwendung der Ableitungsregeln zu gegebenen ganzrationalen Funktionen die Stammfunktionen. Sie definieren die Integrierbarkeit von Funktionen und berechnen bestimmte sowie unbestimmte Integrale. Schließlich lösen sie mit Hilfe der Integration ganzrationaler Funktionen inner- und außermathematische Probleme, u.a. berechnen sie Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen.

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Produktsummen als Rekonstruktion des Gesamtbestandes in einem gegebenen Sachzusammenhang und deuten dabei den Inhalt von orientierten Flächen im Kontext,
- definieren eine Funktion $F: D \to \mathbb{R}$ mit der Ableitung $f: D \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion von f, wenn F für alle $x \in D$ von f differenzierbar ist und ermitteln für den jeweils maximalen Definitionsbereich alle Stammfunktionen zu einer gegebenen ganzrationalen Funktion,
- bestimmen für eine auf einem Intervall definierte Funktion die Stammfunktion, deren Graph durch einen vorgegebenen Punkt geht,
- erläutern das Flächeninhaltsproblem für eine beschränkte Funktion $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$,
- berechnen (näherungsweise) das bestimmte Integral einer auf einem Intervall beschränkten Funktion und bezeichnen eine auf einem Intervall beschränkte Funktion, deren Ober- und Untersumme einen gemeinsamen Grenzwert besitzt, als integrierbar,
- vollziehen Integrationsregeln des bestimmten Integrals nach und wenden diese an,
- definieren für eine auf einem geschlossenen Intervall stetige Funktion die Integralfunktion,
- erläutern den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden diesen zur Berechnung bestimmter Integrale an,
- bezeichnen die Menge aller Stammfunktionen einer stetigen Funktion als unbestimmtes Integral,
- berechnen Inhalte von Flächen, die in einem geschlossenen Intervall von der x-Achse und dem Graphen einer Funktion sowie Inhalte von Flächen, die von zwei Funktionsgraphen begrenzt werden.

Lerninhalte

- Definition der Stammfunktion
- Unterscheidung zweier Stammfunktionen durch additive Konstante
- bestimmtes Integral als Grenzwert von Untersumme bzw. Obersumme von f über einem Intervall [a, b] bei äquidistanter Zerlegung
- Integralsymbol; untere, obere Integrationsgrenze; Integrand; Integrandenfunktion; Differential; Integrationsvariable

- Integrationsregeln:
    - Linearität
    - Intervalladditivität
    - Vertauschung der Integrationsgrenzen
    - Monotonieerhaltung
- Integrierbarkeit stetiger Funktionen
- Definition der Integralfunktion einer stetigen Funktion auf einem geschlossenen Intervall
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Definition des unbestimmten Integrals

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Einführung in die Integralrechnung basiert auf der Riemannschen Definition des Integralbegriffs und kann über das Berechnen krummlinig begrenzter Flächen oder durch den Übergang von der Änderung zum Bestand erfolgen.
- Durch Aufzeigen weiterer Anwendungen kann eine zu enge Koppelung des Integralbegriffs an den Flächeninhaltsbegriff vermieden werden.

Lerngebiet 14: Exponentialfunktionen
Zeitrichtwert: 24 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse aus ihrem Erfahrungsbereich und ermitteln charakteristische Größen durch Grenzwertberechnungen, Logarithmieren sowie mithilfe der Differential- und Integralrechnung.

Die Schülerinnen und Schüler

- nennen und beschreiben außermathematische Beispiele exponentieller Wachstumsprozesse und grenzen diese gegenüber linearem Wachstum ab,
- erstellen Wertetabellen und zeichnen Graphen aus diskreten Punkten,
- entwickeln die Bildungsgesetze arithmetischer und geometrischer Folgen,
- definieren eine allgemeine Exponentialfunktion und geben den Definitions- und Wertebereich an,
- untersuchen die Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion in Abhängigkeit von den Parametern,
- geben die Eulersche Zahl e als Grenzwert einer Zahlenfolge und als Näherungswert an,
- bezeichnen die Exponentialfunktion zur Basis e als e-Funktion,
- erläutern die Umkehrbarkeit der allgemeinen Exponentialfunktion sowie der e-Funktion und bezeichnen die Umkehrfunktion als Logarithmusfunktion bzw. ln-Funktion,
- ermitteln das Argument einer geeigneten Exponentialfunktion zu gegebenem Funktionswert graphisch und rechnerisch,
- definieren den Logarithmus zu einer allgemeinen Basis sowie den dekadischen, binären und natürlichen Logarithmus,
- führen die Logarithmengesetze auf die Potenzgesetze zurück und wenden sie an,
- erläutern, dass die e-Funktion mit ihrer Ableitungsfunktion übereinstimmt,
- stellen Funktionsgleichungen zu realen exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen auf und bestimmen charakteristische Größen,
- bestimmen die Stammfunktion sowie bestimmte und unbestimmte Integrale einfacher e-Funktionen.

Lerninhalte

- lineares Wachstum und arithmetische Folgen
    - $a_{n+1} = a_n + d$
    - $a_n = a_0 + n \cdot d$
    - konstante Differenz als konstante Wachstumsrate
- exponentielles Wachstum und geometrische Folgen
    - $a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad q > 0$
    - $a_n = a_0 \cdot q^n$
    - konstanter Quotient als konstanter Wachstumsfaktor

- Wachstumsverhalten in Abhängigkeit von q
    - Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$, mit $q = 1 + \frac{p}{100}$
- Definition einer allgemeinen Exponentialfunktion
  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \quad x \mapsto a \cdot b^x; \quad a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$
- Eigenschaften von Exponentialfunktionen
    - Definitions- und Wertemenge
    - Monotonie und Stetigkeit
    - Ordinatenabschnitt
    - Verhalten im Unendlichen
    - Spiegelung des Graphen an der y-Achse
- Definition der Eulerschen Zahl $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- Definition der e-Funktion
- Logarithmusfunktion und ln-Funktion als Umkehrfunktion
- Logarithmieren
    - dekadischer, binärer und natürlicher Logarithmus
    - Logarithmengesetze
- Ableitung der e-Funktion
- charakteristische Größen exponentieller Wachstums- und Zerfallsprozesse vom Typ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a + b e^{\alpha x}; \quad a, b, \alpha \in \mathbf{R}; \quad b, \alpha \neq 0$
    - Anfangswert
    - Wachstumsfaktor
    - Zeit- oder Zerfallskonstante
    - Halbwertszeit, Verdopplungszeit
    - Wachstumsrate
- Integration (bestimmtes und unbestimmtes Integral) von Funktionen vom Typ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a + b e^{\alpha x}; \quad a, b, \alpha \in \mathbf{R}; \quad b, \alpha \neq 0$

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Einleitende Anwendungsbeispiele: Zellteilung, Pflanzenwachstum, sukzessives Falten eines Blattes, Schachbrettlegende, Kapitalverzinsung, Luftdruckformel usw.
- Der auf reelle Exponenten erweiterte Potenzbegriff aus LG 8 erlaubt die Definition von Exponentialfunktionen.
- Die Eulersche Zahl kann als Grenzwert anhand der stetigen Verzinsung eingeführt werden.
- Die ln-Funktion wird nur im Rahmen der Umkehrbarkeit der e-Funktion und zur Lösung von Exponentialgleichungen als Operator behandelt.
- Die Ableitung der e-Funktion kann graphisch mithilfe von Funktionsplottern durch Darstellung dynamischer Tangenten erarbeitet werden.

- Zusammenfassend finden alle behandelten Lerninhalte in der Betrachtung und Analyse realer Wachstums- und Zerfallsprozesse Anwendung. Beispiele: barometrische Höhenformel, Newtonsche Abkühlungskurve, Auf- und Entladung eines Akkumulators, Bevölkerungswachstum, Zerfall radioaktiver Substanzen, usw.

Lerngebiet 15: Trigonometrische Funktionen (FOS I)

Zeitrichtwert: 24 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler modellieren periodische Prozesse aus dem naturwissenschaftlichen Bereich durch trigonometrische Funktionen. Sie ermitteln charakteristische Größen durch Lösen trigonometrischer Gleichungen sowie mithilfe der Differential- und Integralrechnung.

Die Schülerinnen und Schüler

- übertragen die Definition von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ im rechtwinkligen Dreieck auf den Einheitskreis und erweitern sie durch Einführung eines orientierten Drehwinkels auf beliebige Winkel
- interpretieren zu gegebenem Drehwinkel die Länge x des zugehörigen Kreisbogens als Bogenmaß und definieren sin(x), cos(x) und tan(x) als reelle Funktionen
- leiten die Formel zur Umrechnung von Grad- und Bogenmaß her und nehmen Umrechnungen vor
- zeichnen die Graphen der trigonometrischen Funktionen und untersuchen ihre Eigenschaften
- berechnen die exakten Funktionswerte von sin(x), cos(x) und tan(x) an charakteristischen Stellen
- untersuchen die Auswirkungen von Verschiebung, Streckung und Stauchung in Richtung beider Koordinatenachsen sowohl auf den Graph als auch auf die Funktionsgleichung von sin(x) und erläutern die entsprechenden physikalisch-technischen Bezeichnungen
- berechnen die Argumente zu gegebenen Funktionswerten sowie Schnittpunkte trigonometrischer Funktionen durch Lösen einfacher trigonometrischer Gleichungen
- ermitteln graphisch die Ableitung von sin(x) und cos(x)
- bestimmen die Ableitung von tan(x) unter Verwendung der Quotientenregel
- geben die Stammfunktion von sin(x) und cos(x) sowie der allgemeinen Sinus- und Kosinusfunktion an
- modellieren periodische Prozesse aus dem naturwissenschaftlichen Bereich und lösen damit verbundene als auch innermathematische Differentiations- und Integrationsaufgaben mit überschaubarem Aufwand

Lerninhalte

- Winkelfunktionen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ am Einheitskreis
- trigonometrischer Pythagoras
- Bogenmaß eines Winkels am Einheitskreis
- Definition der reellen Funktionen sin(x), cos(x), tan(x)
- Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen:
    - Definitions- und Wertemenge
    - Symmetrie
    - Periodizität

- Nullstellenmenge
- $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

- exakte Funktionswerte (soweit definiert) für $x \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$
- allgemeine Sinusfunktion
  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a \cdot \sin(b(x-c)) + d; \quad a,b \in \mathbf{R}^*, c,d \in \mathbf{R}$
  - Amplitude
  - Periode und Periodendauer
  - Kreisfrequenz
  - Phasenwinkel
- Lösen einfacher trigonometrischer Gleichungen
- Ableitung von sin(x), cos(x) und tan(x)
- Stammfunktionen folgender Funktionstypen
  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a \cdot \sin(b(x-c)) + d; \quad a,b \in \mathbf{R}^*, c,d \in \mathbf{R}$
  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a \cdot \cos(b(x-c)) + d; \quad a,b \in \mathbf{R}^*, c,d \in \mathbf{R}$

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Tangensfunktion kann am Einheitskreis mithilfe einer Strahlensatzfigur oder durch ähnliche Dreiecke dargestellt werden.
- Die oben aufgeführten charakteristischen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen lassen sich durch Überlegungen am Einheitskreis anschaulich erarbeiten.
- Ebenso können die exakten Funktionswerte an den genannten Stellen am Einheitskreis geometrisch berechnet werden.
- Bei der Untersuchung trigonometrischer Funktionen sind häufig trigonometrische Gleichungen zu lösen. Dabei sollten keine Additionstheoreme oder Formeln für das doppelte Argument erforderlich sein.
- Die Ermittlung der Stammfunktionen der allgemeinen Sinus- und Kosinusfunktion bedarf keiner Substitutionsregel sondern kann leicht durch Überlegungen zur Kettenregel der Ableitung erfolgen.

Lerngebiet 16: Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$ (FOS I)

Zeitrichtwert: 84 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Vektorbegriff und lösen mithilfe der Vektorrechnung geometrische Problemstellungen im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$. Sie beschreiben mithilfe des Vektorbegriffs Punkte, Geraden und Ebenen im Raum und geben die Lagebeziehungen zwischen diesen für konkrete Anwendungsbeispiele an. Die Schülerinnen und Schüler berechnen die die Lagebeziehungen beschreibenden Größen und deren Maß.

Die Schülerinnen und Schüler

- führen zeichnerisch die Translation einer Punktmenge im $\mathbb{R}^2$ im kartesischen Koordinatensystem durch und erläutern anhand der Zeichnung den Begriff der Pfeilklasse und den des Repräsentanten der Pfeilklasse
- erklären mithilfe der Abbildung des Koordinatenursprungs auf einen beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^3$, dass die Translation eindeutig durch das Zahlentripel der Koordinaten des Bildpunktes identifiziert und dargestellt werden kann
- erläutern die innere Verknüpfung „+“ in der Menge der Translationen, indem Sie diese Verknüpfung rechnerisch und zeichnerisch durchführen und geometrisch deuten
- definieren das neutrale Element und das inverse Element der inneren Verknüpfung „+“
- erläutern die äußere Verknüpfung „g“, indem sie diese rechnerisch und zeichnerisch darstellen und geometrisch als zentrische Streckung interpretieren
- definieren den Begriff Vektor als Translation mit der inneren Verknüpfung „+“ und der S-Multiplikation
- erläutern die Gleichheit, Kollinearität und Orthogonalität von Vektoren
- geben die Rechengesetze der Vektoraddition an und veranschaulichen diese geometrisch
- erklären die Subtraktion eines Vektors als Addition seines Gegenvektors und veranschaulichen dies zeichnerisch
- definieren den Betrag eines Vektors und interpretieren diesen geometrisch
- erläutern die Begriffe Nullvektor und Einheitsvektor, indem sie die Richtung und den Betrag heranziehen
- geben die Rechengesetze der S-Multiplikation an und veranschaulichen diese geometrisch
- definieren den Begriff Linearkombination und veranschaulichen diesen geometrisch
- zeigen rechnerisch die lineare Abhängigkeit einer Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und interpretieren dies geometrisch
- beschreiben mithilfe des Begriffs der linearen Abhängigkeit, der Orthogonalität von Vektoren sowie deren Betrag den Begriff Orthonormalbasis
- stellen die Vektorkoordinaten eines Vektors bezüglich einer gegebenen Basis auf, insbesondere der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$

- geben die Ortsvektoren von Punkten im kartesischen Koordinatensystem in Koordinatenschreibweise an
- stellen einen beliebigen Vektor im $\mathbb{R}^3$ als Differenz von Ortsvektoren dar
- definieren das Skalarprodukt zweier Vektoren und veranschaulichen dies geometrisch
- geben die Eigenschaften des Skalarprodukts an und führen die Berechnung des Skalarproduktes bezüglich einer gegebenen Orthonormalbasis durch
- stellen einen Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und dem Betrag eines Vektors her,
- definieren mithilfe des Skalarproduktes die Orthogonalität zweier Vektoren
- wenden das Skalarprodukt zur Lösung geometrischer Probleme wie Winkelberechnungen, Längenberechnungen und Projektionen an
- definieren das Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und veranschaulichen dieses geometrisch
- geben die Eigenschaften des Vektorproduktes an
- wenden das Vektorprodukt zur Lösung geometrischer Probleme wie Flächenberechnungen und Bestimmung von Normalenvektoren an
- ermitteln bei gegebenen Punkten bzw. Punkten und Richtungsvektoren Gleichungen von Geraden und Ebenen in Parameterdarstellung
- bestimmen mithilfe des Vektorprodukts einen Normalenvektor einer gegebenen Ebene
- stellen die Ebenengleichung in Normalenform auf
- ermitteln die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen und führen Abstandsberechnungen von Punkt-Punkt, Punkt-Gerade und Punkt-Ebene durch
- bestimmen die Schnittmenge zweier Geraden, einer Geraden und einer Ebene sowie zweier Ebenen

Lerninhalte

- Translation (Parallelverschiebung) als Abbildung eines Punktes auf einen anderen Punkt
- Darstellung der Translation als Pfeil
- Darstellung der Translation als Zahlentripel des Bildpunkts eines einzigen Urbildpunktes (insbesondere des Koordinatenursprungs)
- Pfeilklasse als Menge aller Pfeile mit gleicher Richtung und gleicher Länge
- Repräsentant einer Pfeilklasse
- innere Verknüpfung „+“ in der Menge der Translationen: Kommutativität, Assoziativität, Neutrales Element, Inverses Element
- äußere Verknüpfung „g“ als Multiplikation von Translationen mit reellen Zahlen: S-Multiplikation
- Vektor als Translation
- Gleichheit, Parallelität (Kollinearität) und Orthogonalität
- Vektoraddition als innere Verknüpfung „+“
- Nullvektor

- Gegenvektor
- Einheitsvektor
- Betrag und Länge eines Vektors
- Linearkombination
- lineare Abhängigkeit
- Orthonormalbasis
- Ortsvektor
- Skalarprodukt (Distributivität, Verträglichkeit mit S-Multiplikation, Kommutativität, positive Definitheit)
- Projektion
- Winkel zwischen Vektoren
- Parameterdarstellung von Geraden: Punktrichtungsgleichung, Zwei-Punkte-Gleichung
- Lagebeziehung zwischen Geraden: parallele, schneidende, windschiefe Geraden
- Verbindungsgerade und Verbindungsstrecke zweier Punkte im Raum
- Parameterdarstellung von Ebenen: Punktrichtungsgleichung, Drei-Punkte-Gleichung
- Normalenvektor
- Vektorprodukt (Alternativgesetz, Distributivgesetz, Verträglichkeit mit der S-Multiplikation)
- Allgemeine Normalengleichung einer Ebene
- Lagebeziehung zwischen Ebenen: parallele, sich schneidende Ebenen, Winkel zwischen zwei sich schneidenden Ebenen
- Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene: Gerade innerhalb der Ebene, Gerade (echt) parallel zur Ebene, Gerade schneidet Ebene
- Abstandsberechnung Punkt-Punkt, Punkt-Gerade, Punkt-Ebene
- Schnittpunkte und Schnittgeraden

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Alle Ausführungen beziehen sich auf den euklidischen Raum.
- Im Hinblick auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ empfiehlt es sich möglichst früh den Bezug zum kartesischen Koordinatensystem herzustellen.
- Als Bezugskoordinatensystem für die Vektorrechnung ist das kartesische Koordinatensystem zu verwenden.
- Als Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ wird die folgende Basis herangezogen:
    - $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

Lerngebiet 17: Finanzmathematische Modelle (FOS W)
Zeitrichtwert: 68 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler modellieren finanzmathematische Probleme mithilfe von Tabellen und Formeln, lösen sie und interpretieren die Ergebnisse.

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern den Unterschied zwischen einfacher Verzinsung und Zinsverzinsung und modellieren den Zinseszins mithilfe einer Exponentialfunktion,
- ermitteln die Endkapitalformel und erklären den Zusammenhang zwischen Anfangskapital und Endkapital,
- stellen die Endkapitalformel nach Laufzeit, Anfangskapital und Zinssatz um,
- ermitteln die Endkapitalformel für Zeitabschnitte mit verschiedenen Zinssätzen und stellen nach allen Variablen um,
- unterscheiden jährliche und unterjährliche Zinsperioden,
- erläutern die Beziehung zwischen dem nominellen Jahreszinssatz und dem relativen unterjährigen Zinssatz und berechnen das Endkapital bei unterjähriger Verzinsung,
- bestimmen den relativen unterjährigen Zinssatz, der zur gleichen Verzinsung wie der effektive jährliche Zinssatz führt und benennen diesen als konformen unterjährigen Zinssatz,
- erklären den Unterschied zwischen Anfangswert und Barwert,
- vergleichen unterschiedlich fällige Zahlungsreihen mithilfe des Äquivalenzprinzips,
- erklären den finanzmathematischen Begriff der Rente, unterscheiden zwischen nachschüssiger und vorschüssiger Rente ~~und verdeutlichen den Unterschied auch graphisch,~~
- leiten die Endwertformel der Rente aus der Summenformel für eine geometrische Reihe her,
- berechnen den Rentenendwert, die Höhe der Rente und die Laufzeit,
- ~~erläutern das Abschätzen der Laufzeit in der Endwertformel,~~
- beschreiben den Zusammenhang zwischen Barwert und Rentenendwert und ermitteln die Barwertformel mithilfe der Endwertformel,
- berechnen den Barwert und die Rente,
- wandeln monatliche vor- und nachschüssige Rentenzahlungen in die jährliche Ersatzrente um und umgekehrt,
- vergleichen mithilfe des Äquivalenzprinzips aufgezinste Leistungen und abgezinste Gegenleistungen,
- ermitteln die Kapitalaufbauformel durch Verknüpfung der Zinsverzinsung und Rentenzahlung,
- beschreiben die Kapitalabbauformel als Differenz von aufgezinster Leistung und aufgezinster Gegenleistung,
- berechnen das Endkapital bzw. das Restkapital, das Anfangskapital und die Rente bei Kapitalaufbau bzw. Kapitalabbau,

- erläutern die Unterschiede zwischen Annuitätentilgung und Ratentilgung,
- begründen die Annuitätentilgung als eine Form des Kapitalabbaus und berechnen die Annuität mithilfe der Kapitalabbauformel und als Prozentannuität,
- stellen einen Tilgungsplan zur Annuitätentilgung auf.

Lerninhalte

- jährliche lineare Verzinsung vs. Zinsverzinsung
- Endwertformel der Zinseszinsrechnung
- unterschiedliche Zinsperioden und wechselnde Zinssätze
- relativer und konformer unterjähriger Zinssatz
- Äquivalenzprinzip insbesondere Barwertmethode
- vorschüssige und nachschüssige Rente mit jährlicher Zinsverzinsung
- Rentenendwert- und Rentenbarwertformel
- monatliche Rente mit jährlicher Zinsverzinsung, Jahresersatzrente
- verkettete Probleme der Rentenrechnung
- Kapitalaufbau- und Kapitalabbauformel
- Annuitätentilgung
- Tilgungspläne
- Annuitätenformel und Prozentannuität
- Ermittlung der Restschuld, Zinsen und Tilgungsraten mithilfe von Tilgungsplänen

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Die Formeln sollen explizit hergeleitet werden.
- Es empfiehlt sich die Zahlungsreihen am Zahlenstrahl darzustellen.
- Die Herleitung der Rentenendwertformel kann ohne explizite Behandlung der geometrischen Reihe erfolgen.
- Beim Erstellen von Zins- und Tilgungsplänen empfiehlt sich der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms.

Lerngebiet 18: Grundlagen beschreibender Statistik (FOS D, E+H, G+S)
Zeitrichtwert: 28 Unterrichtsstunden

Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler erfassen auf der Grundlage unterschiedlicher statistischer Merkmale und deren Skalierung, Datenmengen und bereiten diese in Form von Tabellen, Schaubildern und Kennwerten auf. Sie interpretieren gegebene statistische Darstellungen und bewerten hieraus abgeleitete Aussagen.

Die Schülerinnen und Schüler

- ordnen die beschreibende Statistik in das Gesamtgebiet der Stochastik ein
- nennen ihre wesentlichen Ziele und unterscheiden sie von denen der mathematischen (schließenden) Statistik
- erläutern die Grundbegriffe der beschreibenden Statistik
- unterscheiden zwischen qualitativen Merkmalen, Rangmerkmalen und quantitativen Merkmalen sowie zwischen diskreten und stetigen Merkmalen
- teilen Merkmale hinsichtlich ihrer Skalierung ein und beurteilen die Konsequenzen für die Erfassung und Verarbeitung von Merkmalsausprägungen
- ermitteln für diskrete Merkmale anhand von Urlisten absolute und relative Häufigkeiten und Summenhäufigkeiten und stellen diese tabellarisch sowie graphisch dar
- lesen und interpretieren graphische Darstellungen von Häufigkeiten und Summenhäufigkeiten und erläutern Möglichkeiten eine Darstellung zu manipulieren
- beurteilen die Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Klassifizierung von Merkmalsausprägungen und nehmen sinnvolle Klasseneinteilungen vor
- stellen die Häufigkeitsverteilung klassifizierter Merkmalsausprägungen in einem Histogramm dar und entnehmen Histogrammen die Häufigkeiten der klassifizierten Merkmalsausprägungen
- ermitteln Lageparameter, geben ihre Eigenschaften an und beurteilen situationsangemessen ihre Eignung als Repräsentanten der Häufigkeitsverteilung
- erläutern die allgemeine Bedeutung von Mittelwertberechnungen und berechnen und interpretieren problemadäquat insbesondere das geometrische Mittel
- begründen die Ergänzung der Lageparameter bei der Verdichtung von Daten durch Streuungsmaße
- definieren und berechnen die Streuungsmaße und charakterisieren sie durch ihre jeweiligen Vor- und Nachteile

Lerninhalte

- Stochastik, beschreibende vs. schließende Statistik
- Grundgesamtheit, Beobachtungseinheit, Stichprobe, Merkmal, Merkmalsausprägung, Urliste

- qualitative Merkmale, Rangmerkmale, quantitative Merkmale
- diskrete und stetige Merkmale
- Nominalskala, Ordinalskala, metrische Skalen: Intervallskala, Proportionalskala
- absolute und relative Häufigkeiten, absolute und relative Summenhäufigkeiten, Häufigkeitstabelle
- Stab- oder Säulendiagramm, Kreisdiagramm, Piktogramm, Summenpolygon
- Klassifizierung von Merkmalsausprägungen, Klasseneinteilungen
- relative Häufigkeitsdichte, Histogramm
- Lagemaße: arithmetisches Mittel, gewichtetes arithmetisches Mittel, Modalwert, Zentralwert (Median), Quartile
- geometrisches Mittel
- Streuungsmaße: Spannweite, Quartilsabstand, mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel, mittlere Abweichung vom Zentralwert, Varianz und Standardabweichung

Hinweise zum Unterricht bzw. zur Umsetzung

- Als Einstieg kann ein an der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler orientierter Text über ein Umfrageergebnis dienen. Hieran könnte sich eine Umfrage innerhalb der Klasse anschließen anhand der der gesamte statistische Untersuchungsprozess (Problemstellung formulieren, Datenerhebung planen, Datenerhebung durchführen, Ergebnisse darstellen und auswerten, Grenzen diskutieren) erfahren werden kann. Weitere, überschaubare Auswertungen vorliegender Daten sollen die Aussagekraft der unterschiedlichen Kenngrößen und Darstellungsarten bzw. deren Anwendbarkeit verdeutlichen.
  Anwendungsbeispiele bzw. Quellen statistischer Daten: Zeitungsartikel, statistisches Bundesamt, Wahlhochrechnungen bzw. -ergebnisse, sozialwissenschaftliche Forschungsergebnisse usw.