



Lehrplan

Mathematik

Gymnasium

Klassenstufe 5

2014

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufe 5

Nach dem Übergang aus der Grundschule ins Gymnasium geht es in der Klassenstufe 5 zunächst darum, Arbeitstechniken der Grundschule aufzugreifen, daraus gemeinsame Arbeits- und Lernformen zu entwickeln und ein einheitliches Niveau in Bezug auf inhaltliche Anforderungen, auf das Arbeitstempo und auf den Gebrauch der mathematischen Fachsprache anzustreben.

Gleichzeitig gilt es, für ein Arbeitsklima zu sorgen, in dem sich soziale Kompetenzen wie z. B. Kommunikationsfähigkeit und Kooperationsbereitschaft im neuen schulischen Umfeld einspielen und weiter entwickeln können.

Die im Lehrplan formulierten Definitionen gewährleisten Kontinuität über Klassenstufen, Lehrer- und Schulwechsel hinweg. Zugleich geben sie Hinweise über den geforderten mathematischen Präzisierungsgrad.

In jeder Phase des Unterrichts sollten nach Möglichkeit Bezüge zur Alltagswelt und zum Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler hergestellt werden. In diesem Sinne werden Gleichungen zunächst nur kontextbezogen behandelt. Nicht zuletzt dadurch ist schon frühzeitig eine sowohl prognostizierende als auch kritisch reflektierende Haltung gegenüber Ergebnissen zu wecken. Der Unterricht muss geeignete Kontrollverfahren bereitstellen.

Lernbereiche der Klassenstufe 5

Lernbereiche Klassenstufe 5	Mathematik
1. Natürliche Zahlen	etwa 35 Prozent der Unterrichtszeit
1.1. Eigenschaften der natürlichen Zahlen	
Grundrechenarten Anzahlen Zahlenfolgen Zahlenmengen Potenzen mit Exponenten größer 1 Stellenwertsysteme Anordnung Hinweise	
1.2. Rechnen mit natürlichen Zahlen	
Eigenschaften von Addition und Multiplikation Rechnen mit 0 und 1 Vorrangregeln Rechenterme Hinweise	
2. Größen	etwa 25 Prozent der Unterrichtszeit
2.1. Größen im Alltag	
Größen Messen von Größen Ober- und Untereinheiten Umrechnungen Sachaufgaben Hinweise	
2.2. Bruchteile	
Bruchteile von Größenwerten Darstellen desselben Bruchteils Hinweise	
3. Geometrische Grundbegriffe	etwa 25 Prozent der Unterrichtszeit
3.1. Grundbausteine	
Punkt und Strecke Gerade und Strahl Schnittpunkte und Lagebeziehungen Abstandsbegriffe Kreis und Winkel Hinweise	
3.2. Betrachtungen am Rechteck	
Rechteck Flächeninhalt und Umfang des Rechtecks Hinweise	
4. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen	etwa 15 Prozent der Unterrichtszeit
Teiler und Vielfache Teilbarkeit von Summe und Differenz Endstellen- und Quersummenregeln Gemeinsame Teiler und Vielfache Hinweise	

Betrachtungen zum Aufbau und zur Struktur der natürlichen Zahlen fördern in Verbindung mit dem Dezimalsystem das Zahlverständnis; die Kenntnisse aus der Grundschule werden systematisiert und vertieft. Die Schülerinnen und Schüler werden mit Zählverfahren und deren Darstellungsmöglichkeiten vertraut. Tabellen und Diagramme sind dabei an geeigneten Stellen einzusetzen.

Mit den Rechengesetzen rücken allgemeine Eigenschaften der Grundrechenarten in den Vordergrund; sie dienen als Erklärungsmuster für Kalküle und bieten Vorteile beim Umformen von Rechenausdrücken. Die Schülerinnen und Schüler verwenden in zunehmendem Maße Variablen, um Sachverhalte und Problemstellungen allgemein zu beschreiben und mathematisch zu bearbeiten. Begriffe und Symbole der Mengensprache werden im notwendigen Umfang eingeführt.

Angesprochen ist in diesem Lernbereich in erster Linie die Leitidee „Zahl“. An einigen Stellen treten weitere Leitideen hinzu, auf die dann in der linken Spalte gesondert hingewiesen wird.

1.1. Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Grundrechenarten</p> <ul style="list-style-type: none"> • Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division • Kopfrechnen und Kopfrechenhilfen • schriftliche Verfahren • Runden • Überschlagsrechnen • Einschränkungen beim Subtrahieren und beim Dividieren • Rechnen mit Null 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Bezeichner Summe, Differenz, Produkt und Quotient sowie die lateinischen Namen der zugehörigen Rechenglieder und beschreiben bzw. übersetzen damit Rechenausdrücke (K6) • rechnen in den vier Grundrechenarten im Kopf im Zahlbereich bis 500 (K5) • nutzen Kopfrechenhilfen wie das Multiplizieren mit bzw. das Dividieren durch 5 und 10 (K5) • führen schriftliche Algorithmen der Grundrechenarten (maximal zweistellige Divisoren) aus (K5) • formulieren Umkehraufgaben und machen die Probe (K6) • identifizieren Rechenfehler, z. B. durch Endziffernkontrolle oder durch Überschlagsrechnung (K1) • runden Rechenergebnisse sinnvoll entsprechend dem gegebenen Sachverhalt (K3) • belegen an Hand von Beispielen, dass Subtraktion und Division nur eingeschränkt möglich sind (K1)
<p>Anzahlen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Daten 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erheben Daten aus ihrem Alltag und stellen sie in Diagrammen der Situation angemessen dar (K4)
<p>Dieser Abschnitt stellt eine Verbindung zur <u>Leitidee</u> „Daten und Zufall“ her.</p>	

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Zahlenfolgen</p> <ul style="list-style-type: none"> geordnete Aufzählung Bildungsgesetze, ohne Formalisierung als Zuordnung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> stellen Zahlenfolgen in Tabellen dar (K4) erstellen und beschreiben Bildungsgesetze, z. B. lineares Wachstum (K6) ermitteln Gesetzmäßigkeiten in Zahlenfolgen und setzen die Folgen begründend fort (K1)
<p>Die <u>Leitidee</u> „Funktionaler Zusammenhang“ zeigt sich in der Beziehung zwischen aufeinander folgenden Gliedern einer Zahlenfolge.</p>	
<p>Zahlenmengen</p> <ul style="list-style-type: none"> Zahlenstrahl Symbole $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Nachfolger und Vorgänger aufzählende und beschreibende Mengenschreibweise Symbole \in und \notin leere Menge, Symbol $\{\}$ 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> unterscheiden zwischen Zahl und Zahlpunkt (K3) nutzen Zahlpunkte auf dem Zahlenstrahl als Modell für die natürlichen Zahlen (K3) nennen zu natürlichen Zahlen n den Vorgänger $n-1$ ($n \neq 0$) und den Nachfolger $n+1$ (K4) begründen, dass es unbegrenzt viele natürliche Zahlen gibt (K1) fassen Zahlen mit bestimmten Eigenschaften zu Mengen zusammen, z. B. die geraden Zahlen (K4) bezeichnen Mengen mit großen lateinischen Buchstaben (K4) wandeln aufzählende in beschreibende Mengenschreibweise um und umgekehrt (K4)
<p>Beim Arbeiten am Zahlenstrahl soll auch der Bezug zur <u>Leitidee</u> „Messen“ hergestellt werden, z. B. beim Festlegen einer geeigneten Einheit.</p>	
<p>Potenzen mit Exponent größer 1</p> <ul style="list-style-type: none"> Potenz, Basis, Exponent <u>Definition</u>: Ein Produkt mit gleichen Faktoren heißt Potenz. Quadratzahlen, Kubikzahlen, Zweierpotenzen, Dreierpotenzen, Zehnerpotenzen Namen der Zehnerpotenzen bis 10^{12} 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> grenzen Potenzieren und Multiplizieren voneinander ab (K5) berechnen Potenzen (K5) nennen die Quadratzahlen bis 20^2 und die Zweierpotenzen bis 2^{10} auswendig (K5) stellen Potenzen in den Zusammenhang mit geometrischen Objekten, z. B. Aufbau von Würfeln mit Einheitswürfeln (K3) arbeiten bei Potenzen auch mit Variablen, z. B. 2^k und 10^k und a^3 (K5)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Die Behandlung von Quadratzahlen und Kubikzahlen öffnet den Blick auf die <u>Leitideen</u> „Raum und Form“ und „Messen“.</p>	
<p>Stellenwertsysteme</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dezimalsystem <ul style="list-style-type: none"> – Stufenzahl und Stellenwert – Rundungsregeln • Dualsystem als alternative Zahldarstellung • Kontrast: römisches Zahlensystem 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • lesen und schreiben Zahlen bis 1 Billiarde in Worten und in Ziffern (K6) • unterscheiden die Begriffe Zahl und Ziffer und geben in der Zifferndarstellung die Stellenwerte jeder Ziffer an (K6) • schreiben Zahlen bis 1 Million als Zehnerpotenzsummen (K4) • wenden die Rundungsregel an (K5) • entnehmen Zahlenangaben aus Diagrammen (K4) • stellen Zahlen bis 1024 im Dualsystem dar (K5) • übersetzen römische Zahlzeichen ins Dezimalsystem und umgekehrt (K5)
<p>Anordnung</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Definition:</u> Eine Zahl a heißt kleiner als eine Zahl b, wenn sich der Zahlpunkt von a auf dem Zahlenstrahl links vom Zahlpunkt von b befindet. • Symbole $<$, $>$, $=$, \leq, \geq 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • tragen Zahlpunkte auf einem vorgegebenen oder einem geeignet zu skalierenden Zahlenstrahl ein bzw. lesen die Zahl am Zahlpunkt ab (K5) • vergleichen große Zahlen auf der Grundlage der Zifferndarstellung (K4) • nutzen Bilddiagramme zum anschaulichen Vergleich von Zahlen (K4) • veranschaulichen den arithmetischen Mittelwert zweier Zahlen am Zahlenstrahl (K5)

Hinweise**zu Lernbereich 1.1 (Eigenschaften der natürlichen Zahlen)****Methodische und fachdidaktische Erläuterungen**

- Bei Zwischenrechnungen ist auf eine korrekte algebraische Verwendung des Gleichheitszeichens zu achten.
- Die Behandlung weiterer Stellenwertsysteme ist nicht vorgesehen.
- Der Lehrplan thematisiert nicht die Anordnung im Sinne der Addition einer (positiven) Zahl, um von der kleineren zur größeren Zahl zu gelangen.
- Zur Erleichterung der Kommunikation sollten behutsam Variablen eingeführt werden.
- Die Schülerinnen und Schüler sollten auf die Internationalität mathematischer Symbolik hingewiesen werden.
- Mit exponentiell wachsenden Zahlenfolgen kann der Potenzbegriff vorbereitet werden.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Erstellen magischer Quadrate
- Aufbauen und Erkunden von Zahlenmauern
- Internet-Recherche mit dem Suchbegriff "Integer Sequence"

Querverbindungen im Lehrplan

- Lernbereich 4: Teilmengen, Vielfachenmengen
- Klassenstufe 7: Anzahlen als absolute Häufigkeiten

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- historische Zahlensysteme, z. B. der Ägypter, Babylonier und Maya
- Zahlennamen in den Fremdsprachen
- Zahlwort Billion in den USA für Milliarde
- Geschichte der Zahl 0
- Fibonacci-Folgen

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Rechentruainer

Fakultative Inhalte

- Anzahl 2^n der Teilmengen n -elementiger Mengen

1.2. Rechnen mit natürlichen Zahlen

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Eigenschaften von Addition und Multiplikation</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bedeutung der Rechenklammern • <u>Kommutativität der Addition:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a + b = b + a$ • <u>Kommutativität der Multiplikation:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$ • <u>Assoziativität der Addition:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$ • <u>Assoziativität der Multiplikation:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ • <u>Distributivität:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und, falls $b > c$ ist, gilt auch: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • veranschaulichen Grundrechenarten und ihre Eigenschaften geometrisch, z. B.: - Kommutativität der Addition an der Länge einer unterteilten Strecke - Kommutativität der Multiplikation am Flächeninhalt von Rechtecken (K4) • formulieren die Eigenschaften in Worten, z. B.: Wenn man in einer Summe Summanden vertauscht, dann bleibt der Wert der Summe erhalten. (K6) • verschaffen sich Rechenvorteile durch Nutzen der Eigenschaften (K5) • belegen an Zahlenbeispielen, dass Subtraktion und Division nicht assoziativ sind (K5) • nutzen die Eigenschaften beim Lösen von Textaufgaben (K3)
<p>Rechnen mit 0 und 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Neutrales Element der Addition:</u> Das neutrale Element der Addition ist 0. Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a + 0 = a$ • <u>Neutrales Element der Multiplikation:</u> Das neutrale Element der Multiplikation ist 1. Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $1 \cdot a = a$ • <u>Nullproduktsatz:</u> Wenn (mindestens) ein Faktor eines Produktes den Wert 0 hat, dann hat auch das Produkt den Wert 0 (und umgekehrt) • Unmöglichkeit der Division durch 0 • Definition der Potenzen a^1 und a^0 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • berechnen Zahlenterme, in denen 0 und 1 als Teilergebnisse auftreten (K5) • erstellen Verknüpfungstabellen mit 0 und 1 (K5) • legen anhand von Folgen von Potenzen die Werte von Potenzen mit Exponent 0 oder 1 fest (K1) • erläutern, dass der Wert der Potenz 0^0 durch Permanenzreihen nicht eindeutig festgelegt werden kann (K1) • berechnen Potenzen, in denen 0 oder 1 als Basis und/oder Exponent auftreten (K5) • belegen an Zahlenbeispielen, dass das Potenzieren nicht kommutativ und nicht assoziativ ist (K1)
<p>Vorrangregeln</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Vorrangregeln (Prioritätsregeln):</u> <ul style="list-style-type: none"> – Klammern werden zuerst berechnet – innere Klammern werden vor äußeren Klammern berechnet – Potenzieren vor Punktrechnen – Punktrechnen vor Strichrechnen – bei gleicher Rechenart (Punkt- bzw. Strichrechnung) wird von links nach rechts vorgegangen 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • berechnen Zahlenterme mit höchstens zwei Klammerebenen und höchstens sieben Zahlen unter Einhaltung der Vorrangregeln (K5)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Rechenterme</p> <ul style="list-style-type: none"> • Umgang mit Rechentermen <ul style="list-style-type: none"> – Gliedern – Beschreiben – Auswerten – Umformen – Aufstellen – Abschätzen • Umstellungssatz: Rechenglieder dürfen bei gleicher Rechenart (Punkt- bzw. Strichrechnung) unter Mitnahme des Rechenzeichens umgestellt werden. 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben Rechenausdrücke unter Verwendung der Fachbegriffe (K6) • stellen Rechenterme zu verbal beschriebenen Rechenausdrücken auf (K2) • verschaffen sich Rechenvorteile (K5) • erstellen Terme zu Sachaufgaben (K3) • formulieren zu einfachen Termen Sachaufgaben (K3) • stellen unterschiedliche Terme zu Anzahlen bei geometrischen Figurierungen auf (K3) • lösen Zahlenrätsel durch Operationsumkehr (Rückwärtsarbeiten) (K2) • schätzen Werte einfacher Terme ab und begründen ihr Vorgehen (K1)
Hinweise	
zu Lernbereich 1.2 (Rechnen mit natürlichen Zahlen)	
<p>Methodische und fachdidaktische Erläuterungen</p> <ul style="list-style-type: none"> – Es wird empfohlen Rechenbäume zu verwenden. – Bei einigen Anwendungen sollen Variablen in die Terme einfließen. 	
<p>Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit</p> <ul style="list-style-type: none"> – Erstellen von Wandtafeln zu den Rechengesetzen – Verfassen von Zahlenrätseln 	
<p>Querverbindungen im Lehrplan</p> <ul style="list-style-type: none"> – Klassenstufe 8: Terme 	
<p>Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte</p> <ul style="list-style-type: none"> – Schätzen bei Sachaufgaben aus dem Alltag, z. B. Sport – Adam Ries (1492-1559) 	
<p>Fakultative Inhalte</p> <ul style="list-style-type: none"> – Minusklammerregel und Plusklammerregel 	

Das aus der Grundschule und dem Alltag vorhandene Wissen der Schülerinnen und Schüler wird systematisiert und erweitert. Sie erkennen in Größen das Hilfsmittel, reale Gegebenheiten mathematisch zu beschreiben. Dabei erfahren sie die Notwendigkeit, eine Grundeinheit festzulegen und unterscheiden Maßzahl und Maßeinheit. Somit ergeben sich Verbindungen zur Leitidee „Messen“.

Mit Hilfe von Größen und Figuren werden Grundvorstellungen von Bruchteilen und Brüchen entwickelt. Eine systematische Behandlung von Bruchzahlen ist hier nicht vorgesehen.

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln aus tabellarischen oder graphischen Darstellungen Informationen, die sie analysieren, formalisieren oder interpretieren. Umgekehrt können sie Zusammenhänge inhaltlich angemessen, verständlich und ästhetisch ansprechend wiedergeben.

2.1. Größen im Alltag

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Größen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Länge mit der Grundeinheit 1 m • Masse mit der Grundeinheit 1 kg • Zeit mit der Grundeinheit 1 s • Geldwert mit der Grundeinheit 1 € • Speicherplatz in einem digitalen Speicher mit der Grundeinheit 1 Byte = 1 B • Festlegungen der Grundeinheiten 1 m, 1 kg, 1 s, 1 € und 1 B 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • begründen, dass die Einheit einer Größe willkürlich gewählt werden kann und dass es zweckmäßig ist, eine allgemein verbindliche Einheit zu vereinbaren (K1) • beurteilen die historischen Festlegungen über Urmeter, Urkilogramm und Sekundenpendel (K1) • unterscheiden Zeitpunkte und Zeitspannen (K6)
<p>Messen von Größen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wert einer Größe als Produkt aus der Maßzahl und der Maßeinheit 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • unterscheiden zwischen Größe, Maßzahl und Maßeinheit (K6) • messen eine Größe, indem sie zählen, wie oft die Einheit in dem zu messenden Größewert enthalten ist (K3) • vereinfachen Schreibweisen, z. B. $7 \cdot 1 \text{ m} = 7 \text{ m}$ (K5) • schätzen Größen in Alltagssituationen (K3)
<p>Ober- und Untereinheiten</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bedeutung und Abkürzungen der Vorsilben mikro-, milli-, zenti-, dezi- sowie deka-, hekto-, kilo-, mega-, giga-, tera- • Ober- und Untereinheiten der <ul style="list-style-type: none"> – Längeneinheit 1 m: 1 μm, 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 km – der Masseneinheit 1 kg: 1 mg, 1 g, 1 t – der Zeiteinheit 1 s: 1 ms, 1 min, 1 h, 1 d • Obereinheiten der Speicherplatzeinheit 1B: 1 kB, 1 MB, 1GB, 1 TB 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • stellen Zusammenhänge zwischen den Ober- und Untereinheiten und der jeweiligen Grundeinheit her, z. B. <ul style="list-style-type: none"> 1 t = 1000 kg, 1 h = 3600 s, 1 km = 1000 m aber 1 kB = 1024 B (K5) • erläutern den Begriff Umrechnungszahl (K6)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Umrechnungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kommaschreibweise • Ordnen von Größenwerten • Addieren und Subtrahieren von Größenwerten 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • rechnen einen vorgegebenen Wert in eine Untereinheit bzw. eine Obereinheit um, z. B. $3,09 \text{ m} = 309 \text{ cm}$; $89 \text{ min} = 1 \text{ h } 29 \text{ min}$ (K5) • stellen zum Ordnen, Addieren oder Subtrahieren ggf. dieselbe Einheit her (K5) • ordnen Listen von bis zu vier Größenangaben (K1) • berechnen den Wert von Rechenausdrücken mit bis zu vier Größenangaben (K5) • führen in einfachen Fällen Kommaverschiebungen durch (K5) • finden zu gegebenen Geldbeträgen mögliche Stückelungen (K2) • berechnen eine Zeitspanne innerhalb einer Woche, wenn Anfangs- und Endzeitpunkt bekannt sind (K5) • führen elementare Rechnungen im Kopf aus (K5)
<p>Der Umgang mit Maßzahlen stellt den Zusammenhang zur <u>Leitidee</u> „Zahl“ her.</p>	
<p>Sachaufgaben</p> <ul style="list-style-type: none"> • Multiplikation einer Größe mit einer Zahl • Verteilen: Division einer Größe durch eine Zahl • Aufteilen: Division einer Größe durch eine Größe derselben Einheit 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • übersetzen Sachsituationen gegebenenfalls in aussagekräftige Skizzen (K3) • entnehmen Texten relevante Größen (K6) • lösen einfache Sachaufgaben (K2) • prüfen die Plausibilität eines Ergebnisses durch eine Überschlagsrechnung (K3) • formulieren einen an der Situation orientierten Antwortsatz (K3) • verwenden bei Ergebnissen sinnvolle Einheiten und runden sachgerecht (K3) • unterscheiden Verteilen und Aufteilen (K6)

Hinweise**zu Lernbereich 2.1 (Größen im Alltag)****Methodische und fachdidaktische Erläuterungen**

- Man beschränke sich beim Ordnen und Rechnen auf höchstens vier Größenangaben.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Ausmessen des Schulgeländes oder Schulgebäudes

Querverbindungen im Lehrplan

- Lernbereich 1.1: Stellentafel, Stellenwertsysteme
- Lernbereich 3.2: Flächeninhalt
- Klassenstufe 6: Rauminhalt und Oberflächeninhalt
- Klassenstufe 7: Daten in Tabellen und Diagrammen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Maßstäbe von Landkarten
- Physikalisch-technische Bundesanstalt in Braunschweig als Hüterin der Einheiten in Deutschland: www.ptb.de
- historische, aber noch gebräuchliche Einheiten wie z. B. Pfund, Zentner, Meile, Fuß, Fass (barrel)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- interaktive Übungen mit realmath.de, Klasse 5

Fakultative Inhalte

- gemischte Schreibweise von Größen im Rahmen des Alltagsgebrauchs

2.2. Bruchteile

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Bruchteile von Größenwerten</p> <ul style="list-style-type: none"> • Einführung der Bruchschreibweise für Stammbrüche als den n-ten Teil eines Ganzen • echter Bruch, unechter Bruch • Zähler und Nenner 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • stellen Brüche in Balken-, Rechteck-, oder Kreisdiagrammen zeichnerisch dar (K4) • verwenden echte Brüche, z. B. $\frac{3}{5}$ m (K4) • interpretieren einen Bruch als mehrere Teile eines Ganzen, z. B. bedeutet $\frac{2}{5}$ kg: „Teile 1 kg in 5 gleiche Teile und nimm 2 davon.“ (K1) • interpretieren einen Bruch als ein Teil mehrerer Ganzer, z. B. bedeutet $\frac{2}{5}$ kg: „Teile 2 kg in 5 gleiche Teile.“ (K1) • rechnen Bruchteile in Untereinheiten mit ganzzahliger Maßzahl um, z. B. $\frac{2}{3}$ h = 40 min (K5) • rechnen Größen mit ganzzahligen Maßzahlen in Bruchteile einer Obereinheit um, z. B. 75 cm = $\frac{3}{4}$ m (K5)
<p>Brüche in Verbindung mit Bruchteilen sprechen die <u>Leitidee</u> „Zahl“ an.</p>	
<p>Unterschiedliche Darstellungen eines Bruchteils</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erweitern und Kürzen im Zusammenhang mit Zehnerbrüchen • Bezeichnung: Erweitern eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ multiplizieren. • Bezeichnung: Kürzen eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividieren. • Darstellen eines Bruchteils <ul style="list-style-type: none"> – als Bruch mit dem Nenner 100 – in der Dezimalbruchschreibweise • Kreisdiagramme für Vielfache von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nennen alle Teiler von 100 (K5) • veranschaulichen Erweitern und Kürzen an Rechteckdiagrammen bzw. Kreisdiagrammen bei Brüchen, deren Nenner Teiler von 100 oder von 24 sind z. B. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ bzw. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (K4) • wechseln bei Brüchen mit auf 100 erweiterbaren Nennern zwischen Bruch- und Dezimalbruchschreibweise (K4)

Hinweise**zu Lernbereich 2.2 (Bruchteile)****Methodische und fachdidaktische Erläuterungen**

- Die Darstellungen mit Säulen-, Rechteck-, Balkendiagrammen und Tabellen sollen weitgehend in den einzelnen Abschnitten integriert werden.
- Die Verwendung von quadratischen Rechteckdiagrammen bietet sowohl einfache enaktive Zugänge als auch die Anschlussfähigkeit zu Punkten mit rationalen Koordinaten in kartesischen Koordinatensystemen.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Projekt: Erheben, Auswerten und Präsentieren von Daten aus dem schulischen Umfeld
- Fotodokumentation/Materialsammlung zum Auftreten von Brüchen im Alltag

Querverbindungen im Lehrplan

- Lernbereich 3: Geometrische Grundbegriffe, Einsatz des Geodreiecks
- Klassenstufe 6: rationale Zahlen (mit weiteren Grundvorstellungen, Rechenregeln)
- Klassenstufe 7: Prozentrechnung

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Prozentangaben bei Bankgeschäften

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Präsentieren von Daten in Säulen- und Balkendiagrammen

Fakultative Inhalte

- Vergleichen und Ordnen bei gleichem Nenner und gleicher Einheit (Nenner ≤ 100)
- Vergleichen und Ordnen bei gleichem Zähler und gleicher Einheit (Zähler ≤ 20), maximal drei Größenwerte

Durch das Betrachten und Untersuchen konkreter Gegenstände aus ihrem Erfahrungsbereich lernen die Schülerinnen und Schüler die geometrischen Begriffe Punkt, Strecke, Strahl und Gerade sowie die Beziehungen "senkrecht" und "parallel" als Idealisierungen und Modellierungen der Wirklichkeit kennen. Gleichzeitig wird ihnen die Bedeutung dieser Begriffe als Grundbausteine und Grundbeziehungen geometrischer Objekte bewusst. In diesem Sinne trägt die Leitidee „Raum und Form“ die Unterrichtsinhalte. Die Bezeichnungen und Definitionen beschränken sich in Klassenstufe 5 auf ebene Geometrie.

Der allgemein gebräuchliche Abstands begriff wird im Rahmen eines Extremalprinzips mathematisch gefasst. Mit Hilfe der neuen Begriffe können die Schülerinnen und Schüler ebene Figuren erkennen, voneinander unterscheiden und exakt beschreiben.

Die zeichnerischen und konstruktiven Fertigkeiten bei der Handhabung von Lineal, Geodreieck und Zirkel werden weiter entwickelt und gefestigt. Auf sauberes und genaues Arbeiten ist zu achten. Eine wichtige Ergänzung stellen dynamische Geometriesysteme (DGS) dar, die durch ihre Möglichkeiten der Veranschaulichung von Sachverhalten und des entdeckenden Lernens in besonderer Weise zum eigenständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler anregen. Formale Schreibweisen sollten sparsam eingesetzt werden.

Die Kenntnisse von Größen werden um Flächeninhalt und Winkelmaß erweitert. Damit erschließen sich wichtige Anwendungsbereiche der Mathematik. Die Sachaufgaben zum Thema Flächeninhalt und Umfang im Lernbereich 3.2 bieten einen sinnvollen Kontext zur propädeutischen Behandlung von Gleichungen. Eine systematische Behandlung ist in der Klassenstufe 6 vorgesehen, wenn die Grundvorstellungen über Gleichheitszeichen, Aussageformen und Äquivalenzumformungen angemessen zur Verfügung stehen.

3.1. Grundbausteine

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Punkt und Strecke</p> <ul style="list-style-type: none"> • Punkte als geometrische Grundobjekte • Symbole $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$ (lateinische Großbuchstaben) • Strecke als geradlinige Verbindung zweier Punkte • Strecke als kürzeste Verbindung zweier Punkte • Strecke als unendliche Punktmenge • Symbol \overline{PQ} für die Strecke mit den Endpunkten P und Q • Symbole a, b, c, \dots für Strecken (lateinische Kleinbuchstaben) • Streckenlänge als Größe • Festsetzung: Der Abstand zweier Punkte ist die Länge ihrer Verbindungsstrecke. • Symbol \overline{PQ} für die Länge von \overline{PQ} • Symbole a, b, c, \dots auch für die Streckenlänge • Koordinatensystem • Bezeichner: Ursprung, erste und zweite Achse, erste und zweite Koordinate bzw. x- und y-Achse, x- und y-Koordinate • Symbol O für Ursprung (lat.: origo) 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • identifizieren in ihrer Umwelt geometrische Körper und deren Ecken, Kanten und Flächen (K3) • beschreiben Situationen, in denen Strecken als Modell nützlich sind (K3) • verwenden mathematische Symbolik für Punkte, Strecken und Streckenlängen (K6) • nutzen Gitterpunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems für genaue Ortsangaben (K5) • markieren Punkte mit gegebenen Koordinaten im Koordinatensystem und zeichnen die Verbindungsstrecken mit Lineal oder Geodreieck (K5) • bestimmen die Koordinaten von Punkten aus geometrischen Bedingungen, z. B. als Eckpunkte symmetrischer Figuren, Mittelpunkte oder Schnittpunkte von Strecken (K2) • zeichnen Figuren mit bestimmten Eigenschaften und geben die Koordinaten ausgezeichneter Punkte an (K2) • zeichnen alle Diagonalen eines konvexen Vielecks und ermitteln deren Anzahl (K1)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Punkt und Strecke (Fortsetzung)</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> zeichnen Strecken und messen deren Längen mit Lineal oder Geodreieck (K5) nutzen ein Geometriesystem zum Zeichnen von Figuren und zum Messen von Längen (K5)
<p>Gerade und Strahl</p> <ul style="list-style-type: none"> Geraden als beidseitig unbegrenzte gerade Linien Symbole $g, h, \dots k, l, m, n, \dots$ (lateinische Kleinbuchstaben) bzw. g_{AB} oder AB für die Gerade durch die Punkte A und B <u>Grundaussage</u>: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte eindeutig festgelegt. Halbgeraden bzw. Strahlen 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> zeichnen Geraden mit Lineal oder Geodreieck (K5) zeichnen durch einen Punkt mehrere Geraden (K5) zeichnen die durch zwei gegebene Punkte eindeutig bestimmte Gerade (K5) ermitteln zeichnerisch, ob Punkte auf gegebenen Geraden liegen, z. B. bestimmte Orte auf einer Landkarte (K2) verwenden die Bezeichnung Element und die Symbole \in und \notin, um die Lage eines Punktes zu einer Geraden formal wiederzugeben (K4)
<p>Kreis und Winkel</p> <ul style="list-style-type: none"> <u>Definition</u>: Die Menge aller Punkte, die den Abstand r vom Punkt M haben, heißt der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Durchmesser eines Kreises als größter Abstand zweier Kreispunkte <u>Definition</u>: Eine Punktmenge, die von zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird, heißt Winkel. Scheitel und Schenkel Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (kleine griechische Buchstaben) oder mit Hilfe von drei Punkten, z. B. $\angle ASB$ Winkelarten: spitze, rechte, stumpfe, gestreckte, überstumpfe und volle Winkel Gradmaß eines Winkels: Unterteilung des vollen Winkels in 360 gleich große Teilwinkel von je 1° $\angle ASB$ für das Maß von $\angle ASB$ Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ auch für das Winkelmaß Kreis Sektor und Mittelpunktswinkel 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> benennen in ihrer Umwelt kreisförmige Objekte (K3) identifizieren Kreise am Globus (K3) wenden die „Gärtnerkonstruktion“ beim Zeichnen von großen Kreisen an (K5) zeichnen Kreise und Kreisornamente mit dem Zirkel und mit Hilfe von Geometriesystemen (K5) ermitteln zeichnerisch die Punkte, die von zwei festen Punkten bestimmte Abstände haben (K5) messen und zeichnen Winkel mit Geodreieck und mit Geometriesystemen (K5) schätzen Winkelmaße ohne Hilfsmittel (K1) unterscheiden $\angle ASB$ und $\angle BSA$ (K5) berechnen zu gegebenen Bruchteilen die im Kreisdiagramm zugehörigen Mittelpunktswinkel und zeichnen passende Kreissektoren (K5) bezeichnen die Innenwinkel in Vielecken mit Hilfe je dreier Eckpunkte (K4)
<p>Das Arbeiten mit Winkelmaßen setzt die <u>Leitidee</u> „Messen“ um.</p>	

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Schnittpunkte und Lagebeziehungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Definition:</u> Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht, wenn sie einander so schneiden, dass vier maßgleiche Winkel entstehen. • <u>Definition:</u> Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn sie eine gemeinsame Senkrechte haben. • Symbole \perp und \parallel für senkrecht bzw. parallel • Existenz und Eindeutigkeit von Schnittpunkten zweier nichtparalleler Geraden (in der Ebene) 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • begründen, dass zwei verschiedene Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben können (K1) • stellen durch zweimaliges Falten des Zeichenblattes zwei Geraden her, die sich so schneiden, dass vier maßgleiche Winkel entstehen. (K5) • benennen in ihrer Umwelt zueinander senkrechte und parallele gerade Linien (K3) • stellen zueinander senkrechte und parallele Linien durch Falten von Papier her (K5) • zeichnen zueinander senkrechte und parallele Geraden mit Hilfe eines Geodreiecks (K5) • prüfen mit Hilfe eines Geodreiecks, ob Geraden zueinander senkrecht oder parallel sind (K5) • konstruieren die Senkrechte zu einer Geraden durch einen Punkt auf bzw. außerhalb der Geraden mit Hilfe des Geodreiecks (K5) • konstruieren die Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden mit Hilfe des Geodreiecks, indem sie als Hilfslinie eine Senkrechte zeichnen (K5) • nutzen ein Geometriesystem zur Untersuchung von Schnittpunkten und Lagebeziehungen (K2) • beschreiben die Konstruktion von Senkrechten und Parallelen (K6) • zeichnen Senkrechten und Parallelen, auch im Koordinatensystem (K5) • ermitteln, wie viele Schnittpunkte endlich viele Geraden höchstens haben können (K2)
<p>Abstandsbegriffe</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lot von einem Punkt auf eine Gerade als senkrechte Verbindungsstrecke • Festsetzungen: <ul style="list-style-type: none"> – Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Länge des Lotes. – Der Abstand zweier paralleler Geraden ist der Abstand eines Punktes der einen Geraden von der anderen Geraden. 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • messen Abstände von Punkten mit Hilfe eines Lineals oder Geodreiecks, auch im Koordinatensystem (K5) • messen den Abstand von Punkten auf Landkarten (K3) • messen den Abstand eines Punktes von einer Geraden, auch in Sachzusammenhängen (K5) • bestimmen die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben (K5) • nutzen auch Geometriesysteme zur Bestimmung von Abständen (K5)

Hinweise**zu Lernbereich 3.1 (Grundbausteine)****Methodische und fachdidaktische Erläuterungen**

- Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten Begriffe und Beziehungen handlungsorientiert durch selbstständiges Untersuchen von Objekten aus ihrer Erfahrungswelt.
- Die Kompetenz K5 verweist hier in vielen Fällen auf die Handhabung der geometrischen Werkzeuge.
- Die Bedeutung von Definitionen für einen verbindlichen Sprachgebrauch und als verbindliche Sachgrundlage ist herauszustellen.
- Die Mengensprache sollte im Bereich der Geometrie zunächst noch behutsam gebraucht werden.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Erstellen einer Schatzkarte samt einer geometrischen Lagebeschreibung des Schatzes.

Querverbindungen im Lehrplan

- Lernbereich 2.1: Größen im Alltag
- Lernbereich 2.2: Kreisdiagramm

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Strahlenmodell des Lichts in der Optik

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Dynamische Geometriesysteme

Fakultative Inhalte

- Beschreiben von Punktmengen durch Beziehungen zwischen den Koordinaten
- optische Täuschungen
- Schrägbilder von Quadern

3.2. Betrachtungen am Rechteck

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Rechteck</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Definition:</u> Ein Viereck mit vier rechten Innenwinkeln heißt Rechteck. • Eigenschaften des Rechtecks: <ul style="list-style-type: none"> – Die gegenüber liegenden Seiten sind gleich lang. – Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang und halbieren einander. – Ein Rechteck hat einen Umkreis. • <u>Definition:</u> Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt Quadrat. 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • identifizieren in ihrer Umwelt Rechtecke (K3) • unterscheiden zwischen den definieren den Merkmalen und den daraus folgenden Eigenschaften eines Rechtecks (K1) • begründen, weshalb jedes Rechteck einen Umkreis hat (K1) • zeichnen Rechtecke mit vorgegebenen Seitenlängen mit Hilfe eines Geodreiecks • beschreiben die Konstruktion (K6) • zeichnen Rechtecke auch in Koordinatensystemen und geben die Koordinaten der Eckpunkte an (K5) • nutzen Geometriesysteme zum Zeichnen von Rechtecken (K5) • können beim Rechteck die Symmetrieachsen und das Zentrum der Drehsymmetrie angeben (K2)
<p>Flächeninhalt und Umfang des Rechtecks</p> <ul style="list-style-type: none"> • Flächeninhalt, Symbol A • <u>Definition:</u> Das Quadrat mit der Seitenlänge 1 m hat den Flächeninhalt 1 Quadratmeter (1 m^2). • Untereinheiten der Einheit 1 m^2: 1 dm^2, 1 cm^2 und 1 mm^2 • Obereinheiten der Einheit 1 m^2: 1 a, 1 ha und 1 km^2 • Umrechnungszahl 100 • dezimale Schreibweise bei Flächeninhaltsangaben • <u>Satz:</u> Das Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat den Flächeninhalt A mit $A = a \cdot b$. • Quadrat mit der Seitenlänge a: $A = a \cdot a = a^2$ • Umfang eines Rechtecks als Summe der Längen seiner Seiten, formal: • $U = a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$ Quadrat mit der Seitenlänge a: $U = 4 \cdot a$ 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • vergleichen Flächeninhalte von Figuren durch Auslegen mit Quadraten und Auszählen (K5) • ergänzen und zerlegen Flächenstücke zum Vergleich von Flächeninhalten (K2) • zeichnen Rechtecke mit vorgegebenem Flächeninhalt (K5) • schätzen den Inhalt von Flächen in ihrer Umwelt (K2) • nennen Beispiele aus ihrer Umwelt für Flächeninhalte, die die Größenordnung der Flächeneinheiten haben (K3) • bestimmen den Inhalt rechteckiger Flächen aus dem Alltag durch Messen der Seitenlängen (K5) • verwenden sinnvolle Einheiten bei der Angabe von Flächeninhalten (K4) • rechnen Flächeneinheiten um (K5) • erläutern die Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks (K1) • berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken und von Flächen, die sich in Rechtecke zerlegen lassen (K5)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Flächeninhalt und Umfang des Rechtecks (Fortsetzung)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variation von Flächeninhalt und Umfang bei Rechtecken • <u>Satz</u>: Unter allen Rechtecken mit gegebenem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang. • <u>Satz</u>: Unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt. 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • berechnen aus dem Flächeninhalt bzw. dem Umfang und der Angabe einer Seitenlänge die fehlende Seitenlänge (K2) • stellen zum Berechnen von Seitenlängen Gleichungen auf, die sie durch Anwenden von Rechenregeln und durch Umkehroperationen der Grundrechenarten lösen (K2) • bearbeiten Sachaufgaben zum Thema Flächeninhalt und Umfang (K3) • bestimmen in geeigneten Fällen bei gegebenem Flächeninhalt das Rechteck mit dem kleinsten Umfang (K2) • bestimmen bei gegebenem Umfang das Rechteck mit dem größten Inhalt (K2)
<p>Das Bestimmen von Flächeninhalt und Umfang ist ein wesentlicher Bestandteil der Leitidee „Messen“.</p>	
<p>Hinweise</p>	
<p>zu Lernbereich 3.2 (Betrachtungen am Rechteck)</p>	
<p>Methodische und fachdidaktische Erläuterungen</p> <ul style="list-style-type: none"> – Man beachte die Hinweise zum Lernbereich 3.1. – Formeln stellen stets auch funktionale Zusammenhänge dar, z. B. ist der Flächeninhalt eines Rechtecks funktional abhängig von Länge und Breite. 	
<p>Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit</p> <ul style="list-style-type: none"> – Parkettieren mit Rechtecken 	
<p>Querverbindungen im Lehrplan</p> <ul style="list-style-type: none"> – Lernbereich 2.1: Größen im Alltag – Lernbereich 4: euklidisches Parkettieren, ggT und kgV – Klassenstufe 6: Netze von Quadern – Klassenstufe 6: symmetrische Figuren 	
<p>Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte</p> <ul style="list-style-type: none"> – Maße von Spielfeldern im Sport 	
<p>Einsatz digitaler Werkzeuge</p> <ul style="list-style-type: none"> – dynamische Geometriesoftware (DGS) 	
<p>Fakultative Inhalte</p> <ul style="list-style-type: none"> – rechtwinklige Dreiecke – regelmäßiges Sechseck und Achteck – Umfang und Flächeninhalt des Kreises („Gittermethode“, „Kuchenmethode“, Messen mit dem Maßband) 	

Teilbarkeitsprobleme treten in vielen Bereichen der Alltagswelt auf. Sie sind Ausgangspunkt der mathematischen Untersuchungen zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen, was das Verständnis über die Struktur dieses Zahlbereichs festigt und erweitert. Gleichzeitig werden wichtige Grundlagen für das spätere Rechnen mit Brüchen geschaffen. In erster Linie ist somit die Leitidee „Zahl“ angesprochen.

Den Schülerinnen und Schülern wird die zentrale Rolle der Primzahlen beim Aufbau der natürlichen Zahlen bewusst. Diese bestimmen die Teilerstruktur und alle davon abhängigen Größen wie ggT und kgV. Zur Bestimmung von ggT und kgV wird bei großen Zahlen der euklidische Algorithmus angewendet.

Bei der Behandlung der Teilbarkeitskriterien gewinnen die Schülerinnen und Schüler Einblick in das Begründen und Beweisen.

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Teiler und Vielfache</p> <ul style="list-style-type: none"> • Teiler und Teilmengen • Bezeichnung: Eine natürliche Zahl a nennt man Teiler der natürlichen Zahl b, wenn b ohne Rest durch a dividiert werden kann. • Symbol $$ für „teilt“ bzw. „ist Teiler von“ • <u>Definition</u>: Eine natürliche Zahl p mit genau zwei Teilern heißt Primzahl. • Unbegrenztheit der Primzahlenmenge • Begriff des Primteilers • Primfaktorzerlegung und deren Eindeutigkeit • Vielfache und Vielfachenmengen 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Fachbegriffe und Fachsymbolik zur Teilbarkeit (K6) • verwenden ikonische Darstellungen zur Veranschaulichung (K4) • erstellen Teilmengen in Tabellen durch Hinzunahme des Ergänzungsteilers (K4) • verwenden die aufzählende Mengenschreibweise für Teilmengen (K4) • zerlegen Zahlen bis 500 in Primfaktoren (K2) • weisen an Beispielen nach, dass die Primfaktorzerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist (K1) • wenden das Sieb des Erathostenes zum Auffinden der Primzahlen an und erläutern das Vorgehen (K5) • nennen die Primzahlen bis 100 (K6) • begründen, dass jede Zahl außer 1 mindestens zwei verschiedene Teiler hat (K1) • begründen, dass 1 keine Primzahl ist (K1) • geben die Teilmengen und die Vielfachenmenge der Zahl 0 an (K2)

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
<p>Teilbarkeit von Summe und Differenz</p> <ul style="list-style-type: none"> • Teilbarkeit von Summen: <u>Wenn</u> alle Summanden einer Summe durch eine Zahl teilbar sind, <u>dann</u> ist die Summe durch diese Zahl teilbar. • Nichtteilbarkeit von Summen: <u>Wenn</u> die Summanden einer Summe bis auf einen durch eine Zahl teilbar sind, <u>dann</u> ist die Summe durch diese Zahl nicht teilbar. • Aussagenwerte wahr (w) oder falsch (f) 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • belegen die Teilbarkeitsregeln für Summe und Differenz an Hand selbst gewählter Zahlen (K1) • erläutern die Teilbarkeitsregeln für Summen anhand ikonischer Darstellungen (K1) • wenden die Teilbarkeitsregeln für Summe und Differenz an (K5) • belegen, dass die Kehraussagen der Teilbarkeitsregeln für Summe und Differenz falsch sind (K1) • zerlegen Zahlen geeignet in Summen bzw. Differenzen, um eine Nichtteilbarkeit nachzuweisen (K1) • erläutern, dass eine Aussage durch die Angabe eines Gegenbeispiels widerlegt werden kann (K1) • verallgemeinern in Beispielen festgestellte Eigenschaften zu Vermutungen (K1)
<p>Endstellen- und Quersummenregeln</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kriterien zur Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit durch 2, 3, 5, 9, 10, z. B.: <ul style="list-style-type: none"> – Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 9 teilbar (und umgekehrt). – Wenn die Endziffer einer Zahl 0 oder 5 ist, dann ist die Zahl durch 5 teilbar (und umgekehrt). 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wenden die Kriterien zur Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit an (K5) • testen Zahlen bis 500 auf Primzahleigenschaft (K2) • erstellen begründend auf den elementaren Teilbarkeitsregeln weitere Regeln zur Teilbarkeit, z. B. durch 6 und 15 (K2) • erläutern die Bedeutung der Wenn-dann-Struktur am Beispiel der Teilbarkeitsregeln (K1)
<p>Gemeinsame Teiler und Vielfache</p> <ul style="list-style-type: none"> • gemeinsamer Teiler 1 • größter gemeinsamer Teiler (ggT) • euklidischer Algorithmus: arithmetisch und geometrisch • teilerfremde Zahlen: $\text{ggT}(a; b) = 1$ • gemeinsames Vielfaches $a \cdot b$ • kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) 	<p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • finden in unterschiedlichen Teilmengen die gemeinsamen Teiler (K5) • finden in unterschiedlichen Vielfachenmengen die gemeinsamen Vielfachen (K5) • erläutern, weshalb die Ausdrücke „kgT“ und „ggV“ unsinnig sind (K1) • finden den ggT zweier Zahlen bis 100 durch Probieren (K2) • setzen den euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen (bis 5000) ein (K5) • finden das kgV zweier Zahlen bis 25 durch Probieren (K2) • lösen Sachaufgaben zu ggT und kgV (K3)

Hinweise**zu Lernbereich 4 (Teilbarkeit der natürlichen Zahlen)****Methodische und fachdidaktische Erläuterungen**

- Das Sieb des Erathostenes wird vorteilhaft an Hand einer 6-spaltigen Auflistung aller natürlichen Zahlen erstellt.
- Primzahlen > 3 sind Vorgänger oder Nachfolger von Vielfachen von 6
- Das euklidische Parkettieren veranschaulicht den euklidischen Algorithmus.
- Die Begründungen der Teilbarkeitsregeln erfolgen an Hand der Umformung einfacher Zahlenterme.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Internetrecherche zu Primzahlen; größte bekannte Primzahl
- Teilbarkeitsnachweise für Teilbarkeit durch 7 erkunden und anwenden

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 6: Vollständiges Kürzen von Brüchen, Hauptnenner
- Klassenstufe 8: Irrationalitätsbeweise durch Widerspruch zur Eindeutigkeit der PFZ
- Klassenstufe 9: (Linear)Faktorzerlegung von Polynomen

Fächerverbindende und -übergreifende Aspekte

- Schaltjahre und Schalttage im gregorianischen Kalender
- Erathostenes (um 276 - um 197 v. Chr.)
- Euklid (um 360 - um 300 v. Chr.)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Animationen zum Sieb des Erathostenes

Fakultative Inhalte

- Exemplarischer Zugang zum indirekten Beweis des Satzes von Euklid
„Es gibt unendlich viele Primzahlen“
über die Suche nach einem Primteiler der Zahl $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$
- ggT und kgV durch Betrachtung der Primfaktorzerlegungen
- Formel: $\text{ggT}(a,b) \cdot \text{kgV}(a,b) = a \cdot b$
- Menge der gemeinsamen Teiler als Teilmengenmenge des ggT
- Menge der gemeinsamen Vielfachen als Vielfachenmenge des kgV
- Teilbarkeitsregeln für Teilbarkeit durch 4, 6, 8, 11

