

Lehrplan

Mathematik

Gemeinschaftsschule

Allgemeine mathematische Kompetenzen

2014

Mathematisch argumentieren

Beispiele und Gegenbeispiele, Erläuterungen, Begründungen und formale Beweise sind typische Formen mathematischer Argumentationen. Die Schülerinnen und Schüler lernen die Bedeutung exakter Argumentationen kennen, indem sie eigene Lösungsideen und Lösungswege beschreiben und begründen, Argumentationen anderer kritisch prüfen und beurteilen und Fehler entdecken und korrigieren. Sie erwerben dadurch ein Gefühl für zulässige Schlussfolgerungen.

Durch das spielerische Variieren von Aufgaben erlernen die Schülerinnen und Schüler in kreativen Prozessen für die Mathematik typische Arbeitsweisen. Sie stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, sie äußern Vermutungen und begründen diese plausibel. Formale Beweisführungen sind für den G-Kurs nicht vorgesehen.

**Mathematische Zusammenhänge erschließen sich zunächst induktiv. Der formale Beweis steht am Ende einer langen Genese und dient in der Schule weniger dem Überzeugen von der Richtigkeit einer Aussage als dem Verstehen von Zusammenhängen im Sinne des lokalen Ordners. Daher sollen erst in der Doppeljahrgangsstufe 9/10 einfache Aussagen aus dem Geometrieunterricht vorangegangener Jahrgangsstufen (z. B. Winkelsummensatz, Satz des Thales, Satz des Pythagoras) deduktiv begründet werden. Der Einsicht in das Prinzip des deduktiven Ableitens von Aussagen kommt dabei ein höherer Stellenwert zu als dem unverstandenen Wiedergeben einer Argumentationskette.*

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • Ideen und Vermutungen mit eigenen Worten präsentieren und erklären • Beispiele und Gegenbeispiele für bekannte mathematische Objekte angeben • Fehler entdecken und korrigieren 	<ul style="list-style-type: none"> • Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen wiedergeben und bewerten • Beispiele und Gegenbeispiele zu neu definierten mathematischen Objekten angeben • Aussagen durch Beispiele und Gegenbeispiele exemplarisch belegen oder widerlegen • Fehler und Fehlvorstellungen an einfachen vorgegebenen Beispielen erläutern 	<ul style="list-style-type: none"> • Argumentationen überprüfen, bewerten und selbst entwickeln • Fragen stellen, die für die Mathematik typisch sind, und Vermutungen begründet äußern * <i>anhand von Beispielen und Gegenbeispielen Definitionen entwickeln</i> * <i>bekannte geometrische Sätze deduktiv beweisen</i> ** <i>Struktur des indirekten Argumentierens erfassen</i>

Probleme mathematisch lösen

Geeignete heuristische Strategien lassen sich den Schülern z. B. durch folgende Leitfragen nahe bringen: Worum geht es in dem Problem?, Wie lässt sich das Problem in meiner Sprache oder einfacher formulieren?, Was ist gegeben?, Was ist gesucht?, Wie lässt sich das Problem veranschaulichen?, Habe ich ein ähnliches Problem schon einmal gelöst?, In welche Teilprobleme lässt sich das Problem zerlegen?, Kenne ich einfache Spezialfälle des Problems?

Im Unterricht sind heuristische Strategien (wie z. B. Versuch und Irrtum, Überschlagen, systematisches Probieren) und heuristische Hilfsmittel (wie z. B. Tabellen, aussagekräftige Skizzen) bewusst zu machen und an variantenreichen Beispielen ständig zu wiederholen und zu festigen.

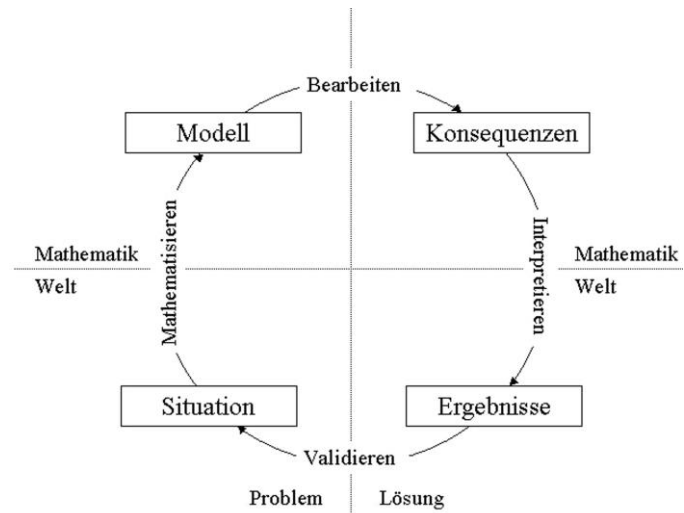
Eine Problemvorstellung mit anschließendem erstem Hineindenken (z. B. in den letzten 10 Minuten einer Unterrichtsstunde) bietet sich methodisch an. Den Schülern die Zeit zum selbstständigen Arbeiten zu lassen, ist Voraussetzung für erfolgreiches Problemlösen in der Schule.

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • Plausibilität von Ergebnissen überprüfen • heuristische Hilfsmittel (Tabelle, Skizze) kennen und verwenden • heuristische Strategien auswählen und anwenden, insbesondere „Versuch und Irrtum“ und „Begründetes Überschlagen“ 	<ul style="list-style-type: none"> • vorgegebene heuristische Strategien auswählen und anwenden, insbesondere „Zerlegen in Teilprobleme“ und „Systematisches Probieren“ 	<ul style="list-style-type: none"> • heuristische Strategien auswählen und anwenden, insbesondere „Systematisches Probieren“ und „Erstellen von aussagekräftigen Skizzen“ • vorgegebene und selbst formulierte Probleme angehen <p>** <i>in gegebenen Situationen Aussagen über das unendlich Kleine oder das unendlich Große durch Extrapolation gewinnen</i></p>

Mathematisch modellieren

Es ist ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts, die Fähigkeit zu schulen, reale Situationen in die Sprache der Mathematik zu übersetzen (*Mathematisieren*) und umgekehrt mathematische Modelle zu realisieren, die entwickelten mathematischen Modelle zu *bearbeiten*, die Konsequenzen in der Realsituation zu *interpretieren* und die Ergebnisse und damit das gesamte Modell zu bewerten (*Validieren*). Möglicherweise ist dieser Prozess erneut zu durchlaufen, möglicherweise müssen verschiedene Modelle gegeneinander abgewogen werden.



Modellbildungskreislauf nach Schupp

Die Graphik veranschaulicht diesen Modellbildungskreislauf mit der Unterscheidung der Seiten *Problem* und *Lösung* und der Ebenen *Welt* und *Mathematik*. Die Schülerinnen und Schüler reflektieren anhand konkreter Beispiele den Modellbildungskreislauf. Sie gewinnen dadurch eine kritische Haltung gegenüber der Aussagekraft mathematischer Resultate in Realsituationen.

Im Unterricht lassen sich kaum lebenswahre Modellierungen durchführen. Dem Mathematikunterricht kommt vielmehr die Aufgabe zu, Modellbildungsprozesse zu reflektieren.

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • Mathematisieren durch Erstellen von Termen, Figuren und Diagrammen • Angeben von möglichen Realsituationen zu gegebenen Termen, Figuren und Diagrammen 	<ul style="list-style-type: none"> • Verwenden von proportionalen, antiproportionalen und linearen Zuordnungen sowie linearen Gleichungen *und linearen Funktionen • Durchführen aller Einzelschritte des Modellierens, insbesondere Interpretieren und Validieren anhand vorgegebener Situationen, Modelle und Konsequenzen 	<ul style="list-style-type: none"> • Verwenden linearer Gleichungen sowie proportionalen und antiproportionaler Zuordnungen • Angeben möglicher Realsituationen zu vorgegebenen linearen, proportionalen oder antiproportionalen Modellen • Durchlaufen und Beschreiben kompletter Modellbildungskreisläufe in wirklichkeitsnahen Situationen <p>* Verwenden von linearen Gleichungssystemen, quadratischen und trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen</p> <p>* Modelle kritisch beurteilen und gegeneinander abwägen</p> <p>** komplexe stochastische Modelle erkennen und handhaben</p>

Mathematische Darstellungen verwenden

Mathematischen Darstellungen lassen sich drei wesentliche Funktionen zuordnen:

- Sie ermöglichen regelhaftes Operieren.
- Sie erweitern unsere Denkmöglichkeiten (z. B. Skizzen und Diagramme, die Problemlösungsprozesse unterstützen).
- Sie sind als Kommunikationsmittel nützlich.

Die Schülerinnen und Schüler sollen unterschiedliche Darstellungen mathematischer Objekte kennen, Beziehungen zwischen diesen herstellen und sie zielgerichtet und situationsangemessen verwenden. Dem Prozess des Interpretierens, des Transformierens und des Entwickelns von Darstellungen muss daher im Unterricht besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Mit Darstellungen kommunizieren Lehrende wie Lernende ihre Vorstellungen. Als Lehrender muss man sich in Lern- und Leistungssituationen der Tatsache bewusst sein, dass verschiedene Lernende je nach Denkstil auch verschiedene Darstellungen bevorzugen.

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen kennen, unterscheiden, verstehen und anfertigen 	<ul style="list-style-type: none"> • verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen verwenden, interpretieren und unterscheiden • Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen 	<ul style="list-style-type: none"> • unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln ** <i>die charakteristischen Eigenschaften von Funktionsgraphen erfassen und zur Beschreibung der Funktion verwenden</i> ** <i>funktionale Abhängigkeiten in Termen darstellen und die Bedeutung der Variablen situationsbezogen analysieren</i>

Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Die Mathematik ist in der Lage, Zusammenhänge in einer Symbolsprache auszudrücken und mit diesen Symbolen formal zu operieren, um somit neue Zusammenhänge zu erschließen, Probleme zu bearbeiten oder bekannte Sachverhalte neu zu strukturieren. Das Erlernen dieser Sprache erfolgt langsam und basiert - wie in jeder anderen Sprache auch - auf dem Lernenden nahestehenden Sinnzusammenhängen. Durch ständiges Anwenden der symbolischen, formalen und technischen Elemente der Mathematik in variierenden inner- wie außermathematischen Kontexten erlangen die Schülerinnen und Schüler eine immer größere Sicherheit.

Eine umfangreiche Formelsammlung, die Zusammenhänge auf symbolischer, ikonischer und verbaler Ebene verdeutlicht, entlastet die Schülerinnen und Schüler vom Auswendiglernen abstrakter Formeln, spricht unterschiedliche Denk- und Lerntypen gleichermaßen an, fördert die Kompetenz im Umgang mit Nachschlagewerken und eröffnet ein großes mathematisches Betätigungsfeld. Die formalen, symbolischen und technischen Elemente der Mathematik nehmen so die Rolle von Werkzeugen an, deren verständiger Umgang im Mittelpunkt eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts steht.

Tabellenkalkulationsprogramme, Funktionenplotter und Dynamische Geometriesysteme bieten ein hohes didaktisches Potenzial, um symbolische und formale Elemente der Mathematik auf anderen Darstellungsebenen zu untersuchen und zu verwenden.

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • schriftliche Grundrechenarten beherrschen • Stellenwerttafel insbesondere zum Umrechnen von Einheiten verwenden • mit Zirkel und Geodreieck saubere Zeichnungen anfertigen 	<ul style="list-style-type: none"> • algorithmische Lösungsverfahren (lineare Gleichungen, Dreisatz) und einfache Termumformungen beherrschen • einfache Terme interpretieren und aufstellen • Formelsammlung, Taschenrechner und Software in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde 	<ul style="list-style-type: none"> • symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt • mit Variablen, Termen, Gleichungen, Zuordnungen, Tabellen und Diagrammen flexibel und situationsangemessen arbeiten • Formelsammlung, Taschenrechner und Software flexibel und situationsangemessen nutzen * <i>algorithmische Lösungsverfahren (quadratische Gleichungen, lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten) ausführen und hinsichtlich ihrer Effizienz beurteilen</i> ** <i>Parameter an ausgewählten Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen variieren</i>

Kommunizieren

Mathematikunterricht trägt zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler u.a. dadurch bei, dass sie „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art“ (Heinrich Winter, Mathematikunterricht und Allgemeinbildung) wahrnehmen, verstehen und beschreiben lernen. Dazu gehört in besonderer Weise die Kompetenz, Informationen aus authentischem Material, z. B. aus Zeitungstexten oder Tariftabellen und -angeboten von Internet- oder Handyanbietern, zu entnehmen und zu bewerten.

Die verbale Beschreibung mathematischer Sachverhalte, Verfahren oder Zusammenhänge ist ein wesentlicher Schritt im Lern- und Verstehensprozess. Erst nach erfolgter Reflexion kann eine sinnvolle Beschreibung erfolgen.

In der methodischen Gestaltung des Unterrichts ist darauf zu achten, dass durch zahlreiche Sprech- und Schreibanlässe diese Lernprozesse initiiert werden. Das Führen eines Lerntagebuchs oder das Schreiben mathematischer Aufsätze und der mündliche Vortrag sind nur drei mögliche methodische Varianten.

Im Unterricht sind dabei Lern- und Leistungssituationen streng und für die Schülerinnen und Schüler klar erkennbar zu trennen. Nur so kann eine Unterrichtskultur entstehen, in der Fehler bzw. Irrwege für eine fruchtbare Auseinandersetzung mit den Lerninhalten genutzt werden.

Kumulative Entwicklung der Kompetenz

Klassenstufe 5/6	Klassenstufen 7/8: G-Kurs Klassenstufen 7/8: E-Kurs* zusätzlich	Klassenstufe 9: G-Kurs Klassenstufen 9/10: E-* / A-Kurs** zusätzlich
<ul style="list-style-type: none"> • Ergebnisse in kurzen Beiträgen präsentieren und schriftlich darstellen • Informationen aus einfachen mathematischen Darstellungen (Texte, Bilder, Tabellen) wiedergeben • einfache mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln und eigene Entdeckungen mit eigenen Worten wiedergeben 	<ul style="list-style-type: none"> • Lösungswege dokumentieren und in vorbereiteten Beiträgen präsentieren • Informationen aus mathematischen Darstellungen selbst strukturieren und bewerten • Arbeitsschritte in einem bekannten Verfahren (z. B. Konstruktion, Algorithmus) mit eigenen Worten erläutern 	<ul style="list-style-type: none"> • Informationen aus authentischen Texten (z. B. Zeitung, Werbung) und mathematischen Darstellungen entnehmen, analysieren und bewerten • Bearbeitungen komplexer Arbeitsaufträge präsentieren • mathematische Zusammenhänge mit Fachbegriffen erläutern