Mathematik

Lehrplan
Neunjähriges Gymnasium
Klassenstufe 8

2024

Bild: patpitchaya/stock.adobe.com

Ministerium für Bildung und Kultur
SAARLAND

Vorwort

Schulischer Bildung kommt die Schlüsselaufgabe zu, Kinder und Jugendliche zu befähigen, ihre Persönlichkeit zu entfalten, Fertigkeiten und Kenntnisse zur Teilnahme am gesellschaftlichen Leben zu erwerben und sich in der modernen Gesellschaft zu orientieren. Bildung ist wesentliche Voraussetzung dafür, dass junge Menschen zukünftig ihr Leben und ihre Umwelt selbstbestimmt und in sozialer Verantwortung gestalten und somit an der Bewältigung der gesellschaftlichen, politischen, ökologischen sowie technologischen Herausforderungen der Zukunft mitwirken können.

Schule muss einerseits auf die tiefgreifenden Veränderungsprozesse der digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Transformation reagieren und anderseits genügend Raum für individuelle Lern- und Bildungsprozesse ermöglichen. Vor diesem Hintergrund hat der Landtag des Saarlandes entschieden, die Gymnasien qualitativ weiterzuentwickeln und das neunjährige Gymnasium zum Schuljahr 2023/2024 einzuführen.

Mit einer deutlich erhöhten Gesamtstundenzahl bis zum Abitur sind die Voraussetzungen geschaffen, den digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Herausforderungen im neunjährigen Bildungsgang angemessen zu begegnen und die Gymnasien zukunftsfähig zu gestalten. So gelingt auch eine moderne zeitliche Rhythmisierung des Schulalltags, die gleichzeitig mehr persönlichen Freiraum im Alltag zugesteht. Eigenständige Schulprofile mit unterschiedlichen Zweigen ermöglichen eine individuelle Schwerpunktsetzung entsprechend den Interessen und Neigungen der Schülerinnen und Schüler.

Als Grundlage des schulischen Unterrichtens und Lernens liegen modernisierte Lehrpläne vor, in welchen die Querschnittsthemen Medienbildung und Digitalität, Bildung für Nachhaltige Entwicklung, Demokratiebildung, Berufliche Orientierung sowie Sprachsensibler Fachunterricht jahrgangs- und fächerübergreifend eingebunden sind. Alle Lehrpläne folgen konsequent dem Grundsatz der Kompetenzorientierung und berücksichtigen die aktualisierten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die Sekundarstufe I. Im engen Austausch mit Expertinnen und Experten der saarländischen Hochschulen wurden die aktuellen Erkenntnisse der jeweiligen Fachdidaktiken für die Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums berücksichtigt.

Den besonderen Bedarfen der Orientierungsphase wird in einem gemeinsamen Lehrplan für die Klassenstufen 5 und 6 Rechnung getragen. Die Lehrpläne ab Klassenstufe 7 sind in der Regel als Einzeljahrgänge konzipiert. Dennoch haben die Schulen die Möglichkeit, einzelne Fächer epochal auch über Klassenstufen hinweg zu rhythmisieren.

Durch vernetzte Lehrpläne soll fächerübergreifendes, projektorientiertes Lernen ermöglicht werden, um den Unterricht selbstwirksam und anwendungsorientiert gestalten zu können. In der Differenzierung von verbindlichen und fakultativen Inhalten öffnet sich hinreichend Raum für exemplarisches Lernen und vertieftes Arbeiten; durch die integrierten Hinweise und Vorschläge zum fächerübergreifenden Arbeiten wird zum Erwerb von vernetztem Wissen und übergeordneten Kompetenzen motiviert.

Die modernisierten Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums legen so die Grundlage für die Weiterentwicklung der Unterrichts- und Schulkultur im neunjährigen Bildungsgang.

Zum Umgang mit dem Lehrplan

Durch die Vermittlung von Methodenkompetenzen, Sachwissen und innerer Haltung fördert der Mathematikunterricht maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachliche Grundlage für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist darüber hinaus ein eigenständiger intellektueller Wert. Die im Mathematikunterricht angebahnten Kompetenzen ermöglichen eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leiten zu verantwortungsbewusstem Handeln an. In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen.

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation **methodischer Vorgehensweisen** voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.
- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.
- Im Unterricht kann der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und Medien den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

Kompetenzerwartungen

Der fachspezifische Anspruch der Bildungsstandards[1] im Fach Mathematik wird durch das nachstehende **Kompetenzschema** abgebildet, auf das sich der Lehrplan bezieht.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen)	**Prozessbezogene mathematische Kompetenzen (allg. math. Kompetenzen)**	**Anforderungsbereiche**
Zahl und Operation	Mathematisch argumentieren	A I Reproduzieren
Größen und Messen	Mathematisch kommunizieren	A II Zusammenhänge herstellen
Strukturen und funktionaler Zusammenhang	Probleme mathematisch lösen	A III Verallgemeinern und Reflektieren
Raum und Form	Mathematisch modellieren	
Daten und Zufall	Mathematisch darstellen	
	Mit mathematischen Objekten umgehen	
	Mit Medien mathematisch arbeiten	

Die in diesem Schema genannten sieben **prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen** erfassen ein weites Spektrum mathematischen Arbeitens. Sie lassen sich dabei nicht scharf voneinander abgrenzen, da beim mathematischen Arbeiten oftmals mehrere Kompetenzen zugleich angesprochen werden.

Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben. Die **inhaltsbezogenen Kompetenzen** werden Leitideen zugeordnet und können damit zur Vernetzung der traditionellen Stoffgebiete beitragen. Im Sinne eines spiralförmigen Vernetzens wechseln sich die Leitideen in der Abfolge aufbauend und wiederholend ab.

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Themenfeldern verzichtet.

[1] KMK: Bildungsstandards für das Fach Mathematik - Erster Schulabschluss (ESA) und Mittleren Schulabschluss (MSA), Berlin. 2022.

Der **Anforderungsbereich I (Reproduzieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit geringerem Komplexitätsgrad wie

- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit mittlerem Komplexitätsgrad wie

- das selbstständige Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,
- das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Der **Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit höherem Komplexitätsgrad wie

- das planmäßige und kreative Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- das bewusste und selbstständige Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung neuer Problemstellungen.

Der Aufbau des Lehrplans

Die jahrgangsbezogenen Teile des Lehrplans sind nach Themenfeldern gegliedert, denen jeweils erläuternde Einleitungstexte vorangestellt sind.

Daran anschließend sind in zwei Spalten die verbindlichen inhaltsbezogenen Kompetenzen und die verbindlichen prozessbezogenen Kompetenzen aufgeführt. Diese knüpfen an die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards an. Die bei der Formulierung der prozessbezogenen Kompetenzen verwendeten Operatoren sind gemäß den Erläuterungen im Anhang umzusetzen. Fakultative Inhalte sind lilafarben und kursiv gedruckt.

Der Lehrplan beschränkt sich im Wesentlichen auf Themenfelder und Lerninhalte, die auch Bezugspunkte für schulische und schulübergreifende Leistungsüberprüfungen sind.

Der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und die Nutzung moderner Kommunikations- und Informationsmedien sind an vielen Stellen des Lehrplans ausdrücklich erwähnt. Darüberhinausgehend sollten digitale Mathematikwerkzeuge – soweit fachdidaktisch naheliegend – durchgängiger Bestandteil des Unterrichts sein. Hinweise im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge gibt auch das Basiscurriculum "*Medienbildung und informatische Bildung*"[2].

Als Richtwerte für die Gewichtung der verbindlich zu behandelnden Themenfelder bei der Planung des Unterrichts sind Prozentsätze angegeben. Darüber hinaus lässt der Lehrplan Zeit für Vertiefungen, individuelle Schwerpunktsetzungen, fächerübergreifende Bezüge und die Behandlung aktueller Themen.

Die Reihenfolge der Themenfelder ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Sie nimmt die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.

Jedes Themenfeld im Lehrplan schließt mit Vorschlägen und Hinweisen ab. Die Hinweise sind inhaltlich gegliedert nach den Gesichtspunkten:

- Basisbegriffe
- Vorschläge und Hinweise zu
    - methodischen und fachdidaktischen Erläuterungen,
    - sprachsensiblem Fachunterricht,
    - digitalen Mathematikwerkzeugen
    - fakultativen Inhalten,
    - thematischen Querverbindungen im Lehrplan,
    - fächerverbindenden und fachübergreifenden Aspekten.

[2] Basiscurriculum „Medienbildung und informatische Bildung“, Klassenstufen 1 bis 10, August 2019

Symbole in Verbindung mit Mengen

Menge der

- natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$
- reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

Weitere Symbole[3]:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$

$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$

[3] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung. Berlin. 2024.

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufe 8

Der Unterricht der Klassenstufe 8 verbindet in besonderer Weise Tradition und Innovation. Mit der Behandlung klassischer Themenfelder wie „Kongruenz und Dreieckskonstruktionen" oder „Terme" werden zentrale Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aufgebaut. Dazu zählen das Formalisieren, das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten wie auch das Mathematisieren und das Erarbeiten von Begriffen.

Aus methodischer Sicht eröffnen sich durch den Einsatz digitaler Werkzeuge, insbesondere dynamischer Geometriesoftware, neue Zugänge und Übungsmöglichkeiten. Insbesondere in den Themenfeldern zur Geometrie, aber auch bei der Behandlung der linearen Funktionen, bieten digitale Hilfsmittel vielfältige Möglichkeiten für heuristische, experimentelle und konzeptionelle Tätigkeiten.

Trotz aller Vorteile, die digitale Hilfsmittel bieten, sollte – insbesondere bei der Verwendung eines wissenschaftlichen Taschenrechners[4] – auf einen verständigen Einsatz geachtet werden, um die bis dahin erworbenen Rechenfertigkeiten ohne Hilfsmittel wachzuhalten und zu festigen.

Das Modellieren durch Terme, das Erkennen von Termstrukturen, das Beachten der Regeln beim Umformen und das Ausnutzen von Kontrollmöglichkeiten sollten im Unterricht vielfältig thematisiert werden. Sowohl bei linearen Funktionen als auch in der Geometrie bieten sich zahlreiche Gelegenheiten, vom Wechselspiel zwischen algebraischer Beschreibung und geometrischem Kontext zu profitieren.

Im Themenfeld „Lineare Funktionen" sowie in den Themenfeldern zur Geometrie sind vielfältige Verbindungen zu den Querschnittsthemen BNE und Berufliche Orientierung zu finden.

Hinweise zum sprachsensiblen Mathematikunterricht sind zu je einem Themenfeld aus den Bereichen Geometrie, Funktionenlehre sowie Algebra aufgelistet. Durch die bewusste Gestaltung des sprachlichen Inputs fördern Lehrkräfte eine erfolgreiche Sprachrezeption und Sprachproduktion der Schülerinnen und Schüler und unterstützen so gezielt den Aufbau von Bildungs- und Fachsprache. Bei der Unterrichtsgestaltung sind daher sprachliche Kompetenzbereiche des Schülerhandelns mitzudenken. Die beispielhaft dargestellten Sprachbausteine sollen die Lehrkräfte für unterschiedliche Sprachniveaus in den Kompetenzbereichen Hören, Sprechen, Lesen und Schreiben sensibilisieren. Sie können als Grundlage für eine bewusste sprachliche Gestaltung von Lehrersprache, Texten und Aufgaben ebenso genutzt werden wie für sprachliche Unterstützungsmaterialien (Scaffolding) bzw. für das Einüben (fach-) sprachlicher Strukturen mit den Schülerinnen und Schülern. Die Sprachbausteine sind vor diesem Hintergrund als exemplarisch zu verstehen und erheben keinen Anspruch auf Verbindlichkeit. Grundlage ist das saarländische Basiscurriculum sprachsensibler Fachunterricht, das auf dem Bildungsserver veröffentlicht ist. Weitere Hinweise zu den Sprachniveaus finden sich im Anhang dieses Lehrplans.

Berufliche Bildung hat den Auftrag, Schülerinnen und Schüler in dem individuellen Prozess der Annäherung und Abstimmung zwischen den eigenen Interessen, Stärken und Wünschen sowie den eigenen Einstellungen, Haltungen und Orientierungen auf der einen Seite und den Möglichkeiten, Bedarfen und Anforderungen der Arbeits- und Berufswelt auf der anderen Seite zu begleiten und zu unterstützen. Bezüge zu Berufen, Berufsfeldern und Berufsbiografien lassen sich in allen Fächern bilden. So können z.B. im Physik- oder Chemieunterricht genauso wie im Fremdsprachenunterricht oder in den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern fachspezifische Berufe angesprochen und Informationen zu Berufsfeldern gegeben werden. Fächerverbindende Kombinationen bieten sich an, auch eine Verknüpfung mit schulischen Projekten und Betriebspraktika. Auch beim Besuch außerschulischer Lernorte können As-

[4] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Hinweise zur Verwendung von Hilfsmitteln (gültig ab Prüfungsjahr 2030). Berlin. 2023.

pekte beruflicher Bildung Berücksichtigung finden. Die Ergebnisse der Recherchen und Reflexionen zu den unterschiedlichen Berufen und Berufsfeldern können von den Schülerinnen und Schülern z.B. in einem Portfolio dokumentiert und ggfls. präsentiert werden.

Themenfelder Klassenstufe 8	Mathematik
1. Kongruenz und Dreieckskonstruktionen	20%[5]
2. Terme	30%
3. Vielecke und Prismen	20%
4. Lineare Funktionen	20%
5. Kreis und Zylinder	10%
6. Rechnen in anderen Zahlensystemen *(nur Informatik - Zweig)*	40%[6]
7. Aussagenlogik *(nur Informatik - Zweig)*	25%
8. Vertiefung der regulären Themenfelder *(nur Informatik - Zweig)*	35%

[5] Die Prozentangaben zu den Themenfeldern 1 bis 5 beziehen sich auf einen Umfang von 3 Wochenstunden.

[6] Die Prozentangaben zu den Themenfeldern 6 bis 8 beziehen sich auf einen Umfang von 2 Wochenstunden.

Anknüpfend an die in der Klassenstufe 6 behandelten Abbildungen wird der Begriff der Kongruenz erarbeitet, der eine zentrale Rolle im Geometrieunterricht der Klassenstufe 8 spielt. Dabei werden zunächst beliebige Figuren hinsichtlich Kongruenz untersucht, bevor eine Einschränkung auf Dreiecke erfolgt.

Neben der Untersuchung zweier Dreiecke auf Kongruenz kommen der Dreiecksungleichung und dem aus der Klassenstufe 7 bekannten Innenwinkelsatz für Dreiecke bei der Überprüfung, ob ein Dreieck überhaupt konstruierbar ist, eine besondere Bedeutung zu. Mit den Kongruenzsätzen für Dreiecke steht ein wichtiges Werkzeug zur Verfügung, um geometrische Sachverhalte zu beweisen.

Die aus der Klassenstufe 7 bereits bekannten besonderen Linien im Dreieck werden um die Höhen und Seitenhalbierenden erweitert. Der Einsatz einer Geometriesoftware ermöglicht den Schülerinnen und Schülern die Entdeckung, dass sich die Seitenhalbierenden bzw. Höhen eines Dreiecks stets in einem Punkt schneiden. Flächeninhaltsberechnungen, die in den Klassenstufen 5 bzw. 6 an Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken erfolgen, werden auf beliebige Dreiecke ausgeweitet.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Kongruente Figuren	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Bezeichnung: Zwei Figuren A und B heißen kongruent zueinander (deckungsgleich), wenn man eine der Figuren so bewegen kann, dass sie mit der anderen Figur zur Deckung kommt.
  ○ Symbol: $A \cong B$
• Kongruenzabbildungen sind:
  ○ Achsenspiegelungen
  ○ Drehungen
  ○ Verschiebungen
  ○ Verkettungen von Achsenspiegelungen, Drehungen und Verschiebungen
• Satz: Wenn zwei Vielecke kongruent sind, dann stimmen sie in den Längen einander entsprechender Strecken und in den Maßen einander entsprechender Winkel überein.
• Satz: Wenn zwei Vielecke in den Längen einander entsprechender Strecken und den Maßen einander entsprechender Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
	• untersuchen Figuren enaktiv auf Kongruenz,
	• untersuchen mithilfe einer Geometriesoftware, ob Figuren kongruent sind,
	• identifizieren bei kongruenten Figuren einander entsprechende Strecken und Winkel,
	• begründen mithilfe der Eigenschaften der Kongruenzabbildungen, dass in kongruenten Figuren einander entsprechende Strecken gleich lang und einander entsprechende Winkel maßgleich sind,
	• fassen den Satz zur Kongruenz von zwei Vielecken und dessen Kehrsatz zu einem "Genau-dann-wenn"-Satz zusammen,
	• geben an, unter welchen Bedingungen zwei Kreise bzw. zwei Quadrate kongruent sind,
	• zeigen an einem Gegenbeispiel, dass aus der Flächeninhaltsgleichheit zweier Figuren im Allgemeinen nicht die Kongruenz dieser Figuren folgt.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Konstruktionsaufgabe sss	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Satz: Im Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die Länge der dritten Seite. (Dreiecksungleichung)	• entscheiden begründet, ob aus drei gegebenen Streckenlängen ein Dreieck konstruierbar ist, • konstruieren ein Dreieck aus drei gegebenen Seitenlängen und beschreiben ihre Konstruktion (Konstruktionsaufgabe sss).
Kongruenzsätze für Dreiecke	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Kongruenzsatz sss: Wenn zwei Dreiecke in den Längen dreier Seiten übereinstimmen, dann sind sie kongruent. • Kongruenzsatz sws: Wenn zwei Dreiecke in den Längen zweier Seiten und dem Maß des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, dann sind sie kongruent. • Kongruenzsatz wsw: Wenn zwei Dreiecke in der Länge einer Seite und den Maßen der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent. • Kongruenzsatz Ssw: Wenn zwei Dreiecke in den Längen zweier Seiten und dem Maß des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen, dann sind sie kongruent.	• konstruieren Dreiecke gemäß den Kongruenzsätzen unter Angabe einer Planfigur, • entwickeln die Bedingung für die Lösbarkeit der Konstruktionsaufgabe wsw, • erläutern, dass die Konstruktionsaufgabe sww auf wsw zurückgeführt werden kann, • zeigen an einem Gegenbeispiel, dass die Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seitenlänge und zwei Winkelmaßen nicht eindeutig ist, • zeigen an einem Gegenbeispiel, dass die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seitenlängen und einem Winkelmaß nicht eindeutig ist, • entwickeln die Bedingung für die Lösbarkeit der Konstruktionsaufgabe Ssw, • begründen, weshalb es keinen Kongruenzsatz www gibt, • untersuchen mithilfe der Kongruenzsätze, ob zwei Dreiecke kongruent sind, • lösen Sachaufgaben, • führen mindestens einen Beweis mithilfe der Kongruenzsätze durch.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Höhe und Flächeninhalt von Dreiecken

	Die Schülerinnen und Schüler
• Höhen eines Dreiecks: ○ Begriffe: Grundseite g, Höhe auf die Grundseite h_g ○ Lage je nach Dreiecksart • Begriff: Höhengerade • Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ○ Lage je nach Dreiecksart • <u>Satz</u>: Das Dreieck mit einer Grundseite der Länge g und der zugehörigen Höhe h_g hat den Flächeninhalt A mit $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$	• zeichnen die drei Höhen eines Dreiecks mithilfe des Geodreiecks (auch mithilfe einer Geometriesoftware), • entdecken mithilfe einer Geometriesoftware, dass sich die Höhen eines beliebigen Dreiecks in genau einem Punkt schneiden, • leiten die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks her, • berechnen Flächeninhalte, Höhen und Seitenlängen von Dreiecken (auch in Sachkontexten).

Seitenhalbierende und Schwerpunkt von Dreiecken

	Die Schülerinnen und Schüler
• Seitenhalbierenden eines Dreiecks ○ als Schwerelinien ○ als Strecke, die eine Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet ○ als Strecke, die ein Dreieck in zwei flächengleiche Teildreiecke teilt • Schwerpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ○ Schwerpunktsatz: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S (Schwerpunkt). Der Schnittpunkt S teilt jede Seitenhalbierende vom jeweiligen Eckpunkt aus gesehen im Verhältnis 2:1.	• ermitteln experimentell die Schwerelinien eines Dreiecks, • zeichnen die Seitenhalbierenden eines Dreiecks, • begründen, dass eine Seitenhalbierende eines Dreiecks dieses in zwei flächengleiche Teildreiecke teilt, • entdecken mithilfe einer Geometriesoftware, dass sich die Seitenhalbierenden eines beliebigen Dreiecks in genau einem Punkt schneiden, • zeichnen den Schwerpunkt eines Dreiecks (auch mithilfe einer Geometriesoftware), • entdecken mithilfe einer Geometriesoftware, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Basisbegriffe

Dreiecksungleichung, Grundseite, Höhe, Höhengerade, Höhenschnittpunkt, Kongruenz (-abbildung, -satz), Schwerelinien, Schwerpunkt, Seitenhalbierende, Verhältnis

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Die enaktive Untersuchung auf Kongruenz kann an Papier- und Folienfiguren beispielsweise durch Ausschneiden, Bewegen und Umklappen erfolgen.
- Die Eigenschaften der Kongruenzabbildungen (Längentreue, Winkeltreue, Parallelentreue, Geradentreue, Veränderung bzw. Gleichbleiben des Umlaufsinns) werden erstmals in den Klassenstufen 5/6 (Themenfeld „Kreis, Winkel, Symmetrie") thematisiert.
- Eine mögliche Zusammenfassung der beiden Wenn-Dann-Sätze zur Kongruenz von Vielecken ist:
  Satz: Zwei Vielecke sind genau dann zueinander kongruent, wenn sie in den Längen einander entsprechender Strecken und den Maßen einander entsprechender Winkel übereinstimmen.
- Es genügt, zu jeder der Grundaufgaben einmalig eine Konstruktionsbeschreibung zu notieren.
- Mögliches Gegenbeispiel, anhand dessen gezeigt werden kann, dass die Konstruktion eines Dreiecks ABC aus einer Seitenlänge und zwei Winkelmaßen nicht eindeutig ist: $c = 5\,cm, \alpha = 30°,\ \beta = 60°$ im Vergleich zu $c = 5\,cm, \gamma = 30°,\ \beta = 60°$.
- Beispiele für Sätze, die mithilfe von Kongruenzsätzen bewiesen werden können:
  Kehrsatz des Satzes über die Winkelhalbierende: Wenn ein Punkt im Innern eines Winkels von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand hat, dann liegt er auf der Winkelhalbierenden des Winkels.
  Umkehrung des Basiswinkelsatzes: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel maßgleich sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.
  Tangentenabschnittssatz: Wenn man von einem Punkt P außerhalb eines Kreises Tangenten an den Kreis legt, so sind die beiden Tangentenabschnitte von P zu den Berührpunkten gleich lang.
  Eigenschaften des Mittendreiecks: Jede Seite eines Mittendreiecks ist parallel zur gegenüberliegenden Seite des ursprünglichen Dreiecks und halb so lang wie diese.
- Kongruenzsätze sind aus technischer Sicht Stabilitätssätze, z.B. sss: Ein Viereck mit beweglichen Ecken ist beweglich, ein Dreieck mit beweglichen Ecken ist unbeweglich – daher verwendet man Dreiecke zur Stabilisierung von Konstruktionen (Fachwerk, Hochspannungsmasten, Stützkreuze bei Bücherregalen).
- Der Schwerpunkt eines Dreiecks lässt sich enaktiv konstruieren, indem man es nacheinander an seinen drei Ecken ausbalanciert aufhängt und jeweils mit Hilfe eines Senklots die Schwerelinie einzeichnet.
- Als „Forscheraufgabe" können Vermessungen auf dem Schulgelände dienen, z.B. zur maßstäblichen Ermittlung unzugänglicher Größen.

Vorschläge und Hinweise

Hinweise zum sprachsensiblen Fachunterricht

Fachwortschatz: deckungsgleich, die Dreiecksungleichung, die Grundseite, die Höhe, die Höhengerade, der Höhenschnittpunkt, kongruent, die Kongruenz, die Kongruenzabbildung, der Kongruenzsatz, die Schwerelinien, der Schwerpunkt, die Seitenhalbierende, das Verhältnis „2 zu 1“

„Die beiden Figuren sind kongruent.“

„Die Seitenhalbierenden/die Höhen eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt/Höhenschnittpunkt.“

„Die beiden Figuren A und B sind kongruent/deckungsgleich, weil man Figur A so bewegen kann, dass sie mit Figur B zur Deckung kommt.“

„Da die beiden Dreiecke in den Längen aller drei Seiten übereinstimmen, sind sie gemäß dem Kongruenzsatz SSS kongruent.“

„Wenn zwei Dreiecke in den Längen zweier Seiten und dem Maß des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen, dann sind sie kongruent.“

„Wenn zwei Vielecke kongruent sind, dann stimmen sie in den Längen einander entsprechender Strecken und den Maßen einander entsprechender Winkel überein.“

„Ein Dreieck ist genau dann konstruierbar, wenn die Summe je zweier Seitenlängen größer als die dritte Seitenlänge ist.“

„Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt jede Seitenhalbierende vom jeweiligen Eckpunkt aus gesehen im Verhältnis ‚2 zu 1‘.“

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Durchführung von Konstruktionen mithilfe einer Geometriesoftware
- Einsatz von Geometriesoftware zur Erforschung der besonderen Punkte (Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt) in Dreiecken

Fakultative Inhalte

- *Begründung, dass der Umfang eines Vierecks größer als die Summe der beiden Diagonalenlängen ist*
- *Begründung, dass der Kongruenzsatz sss nicht auf Vierecke übertragen werden kann*
- *Euler-Gerade*
- *Fermat-Punkte*
- *Beweis des Schwerpunktsatzes*
- *Konstruktion von Dreiecken aus Teildreiecken*

Vorschläge und Hinweise

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5/6: Flächen- und Rauminhalte
- Klassenstufe 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie
- Klassenstufe 7: Geometrische Konstruktionen
- Klassenstufe 7: Winkel in Figuren
- Klassenstufe 8: Vielecke und Prismen
- Klassenstufe 9: Ähnlichkeit

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Schwerpunkte von Körpern
- Landvermessung, Navigation
- Statik
- Recherche von Berufen, Berufsfeldern und Berufsbiografien, in denen z. B. Landvermessung, Navigation oder Statik eine besondere Rolle spielen.
- Leonhard Euler (1707-1783)
- Pierre de Fermat (1601-1665)

Aufbauend auf der Behandlung einfacher Terme mit Variablen in Klassenstufe 7 erfolgt der Einstieg in das Themenfeld „Terme“ anhand von Zahlenrätseln sowie geometrischen und kombinatorischen Kontexten. Das Umformen von einfachen Summen- und Produkttermen mit Variablen vertieft den Umgang mit bereits bekannten Rechengesetzen. Die Potenzrechenregeln erweisen sich als nützliches Hilfsmittel bei Termumformungen und können in Klassenstufe 10 im Sinne eines Spiralcurriculums auf negative und rationale Exponenten erweitert werden.

Geometrische Veranschaulichungen begegnen den Schülerinnen und Schülern erneut beim Multiplizieren von Summen. Zentral sind die binomischen Formeln, die sowohl algebraisch hergeleitet als auch geometrisch gedeutet werden. Das Faktorisieren erweist sich in den nachfolgenden Schuljahren als nützliche Technik beim Lösen von Gleichungen.

Fertigkeiten im Umgang mit Bruchtermen und einfachen Bruchgleichungen können im Kontext der Ähnlichkeit sowie in der Physik gewinnbringend aufgegriffen werden. Bei der Wahl der betrachteten Terme und Gleichungen ist auf eine angemessene Komplexität zu achten; insbesondere sollten die Bruchgleichungen auf lineare Gleichungen führen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Terme aufstellen und auswerten	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Terme mit Variablen (Wiederholung)
  ○ Wert eines Terms
  ○ Art eines Terms (Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz)
  ○ Prioritätensetzung durch Klammern und Bruchstriche
• Grundmenge G
• <u>Bezeichnung</u>: Zwei Terme sind gleichwertig über einer Menge G, wenn bei jeder Einsetzung beide Terme den gleichen Wert annehmen.
  ○ Symbol $=$
• Terme, die Beträge enthalten
• Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
	• stellen Terme mit Variablen auf (auch in Kontexten), z. B.
	  ○ Zahlenrätsel
	  ○ Umfang- und Flächeninhaltsterme,
	  ○ Oberflächen- und Volumenterme,
	  ○ Abzählterme geometrischer Muster (figurierte Zahlen),
	  ○ kombinatorische Terme,
	• berechnen den Wert eines Terms (auch mit mehreren Variablen und Beträgen),
	• bestimmen die Art eines Terms durch Gliederung,
	• überprüfen zwei Terme auf Gleichwertigkeit,
	• zeigen exemplarisch, dass die Gleichwertigkeit zweier Terme von der Grundmenge abhängt (z. B. $\|a+b\|$ und $\|a\|+\|b\|$ mit den Grundmengen $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Q}^+$),
	• geben an, dass der Betrag eines Terms keinen negativen Wert annimmt,
	• ordnen vorgegebene Terme passenden, vorgegebenen Sachsituationen zu.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Einfache Summen- und Produktterme umformen	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Ordnen und Zusammenfassen • Plus- und Minusklammerregel • Ausmultiplizieren und Ausklammern	• lassen in geeigneten Fällen den Malpunkt zwischen Zahlen und Variablen oder zwischen zwei Variablen wegfallen, • erläutern die Minusklammerregel durch Ausmultiplizieren mit bzw. Ausklammern von -1, • vereinfachen Terme mit bis zu drei Variablen mithilfe von Rechenregeln.
Terme mit Potenzen umformen	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Potenzrechenregeln für natürliche Exponenten: ○ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ○ $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ ○ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	• leiten ausgehend von der Definition von a^n die Potenzrechenregeln her, • verbalisieren die Potenzrechenregeln, • vereinfachen Terme mit Potenzen.
Produkte von Summen und Binomische Formeln	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Produkte von Summen (und Differenzen) • Binomische Formeln: ○ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ○ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ○ $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ • Binomische Terme $(a+b)^n$ mit $n \leq 4$ • Pascalsches Dreieck	• veranschaulichen die Umformung eines Produktes von Summen in eine Summe von Produkten durch die Zerlegung einer Rechteckfläche, • verbalisieren die Regeln für das Multiplizieren von Summen und Differenzen, • multiplizieren Produkte von Summen aus, • leiten die binomischen Formeln durch Termumformungen her, • veranschaulichen die binomischen Formeln durch die Zerlegung von Quadraten, • formen Terme mithilfe der binomischen Formeln um.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • beweisen, dass das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl ist, • entdecken durch Ausmultiplizieren binomischer Terme das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks, • verwenden das Pascalsche Dreieck zum Ausmultiplizieren binomischer Terme.
Faktorisieren von Termen	
• Faktorisieren	Die Schülerinnen und Schüler • faktorisieren Summenterme durch Ausklammern, • faktorisieren Summenterme in geeigneten Fällen durch Anwenden der binomischen Formeln in umgekehrter Richtung.
Bruchterme umformen	

• Bruchterme mit einer Variablen im Nenner
  ○ Definitionsmenge D
• <u>Weitere Potenzrechenregeln für natürliche Exponenten</u>:
  ○ $a^m : a^n = a^{m-n}, mit\ m \geq n$
  ○ $a^m : b^m = (a : b)^m$
• Umformen von Bruchtermen
  ○ Erweitern und Kürzen
  ○ Addieren und Subtrahieren
  ○ Multiplizieren
  ○ Gleichwertigkeit über der gemeinsamen Definitionsmenge
	Die Schülerinnen und Schüler
	• bestimmen die Definitionsmenge von Bruchtermen,
	• leiten ausgehend von der Definition von a^n die Potenzrechenregeln her,
	• verbalisieren die Potenzrechenregeln,
	• vereinfachen Terme mit Potenzen,
	• formen Bruchterme mit einer Variablen um,
	• bestimmen die Lösungsmenge von Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

- Bruchgleichungen der Form
  - $\frac{ax+b}{mx+n} = c$
  - $\frac{a}{mx} + \frac{b}{x} = c$
  - $\frac{a}{x+m} + \frac{b}{x+n} = \frac{c}{(x+m)\cdot(x+n)}$

Basisbegriffe

Binomische Formeln, binomische Terme, Bruch(-term, -gleichung), Definitionsmenge, Faktorisieren, Fakultät, Gleichwertigkeit, Pascalsches Dreieck, Potenzrechenregeln

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Bei der Prioritätensetzung durch Bruchstriche kann man sich auf das Rechnen mit Doppelbrüchen in 5/6 beziehen.
- Bei der Betrachtung von kombinatorischen Termen bieten sich Fragestellungen zu Anordnungen (beispielsweise von Schülern in einer Reihe) oder das „Händeschüttelproblem“ an.
- In der Regel wird als Grundmenge eines Terms die Menge $\mathbb{Q}$ betrachtet, jedoch eignen sich endliche Grundmengen gerade am Anfang bei der Untersuchung der Gleichwertigkeit zweier Terme mittels Tabellen.
- Beim Umformen einfacher Summen- und Produktterme bieten sich Formen an wie beispielsweise: $2ab - 8x + 8ab - 2x,\ 4x^2 - (9x - 3x^2) + (x^2 + 5x),\ 3xy \cdot 5x \cdot 3,$ $2a \cdot 9a + 2a \cdot (-5a)$
- Es ist nachhaltig fehlerreduzierend, eine Einsetzprobe nach dem Umformen von Termen zur Gewohnheit zu machen.
- Beim Faktorisieren von Termen können Formen betrachtet werden wie beispielsweise: $4 \cdot (x + y) + a \cdot (x + y),\ r \cdot (7 - s) + (s - 7),\ x^2 + 6x + 9,\ 25x^2 - 49y^2$
- Bei der Arbeit mit Bruchtermen ist die Angabe der Definitionsmenge unerlässlich.
- In einfachen Fällen können Bruchgleichungen als Schnittprobleme von Zuordnungsgraphen betrachtet werden, die algebraisch von den Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt noch nicht gelöst werden können, z. B. $\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$.
- Beispiele für Formeln aus verschiedenen Fachgebieten sind: Volumen und Oberfläche in der Mathematik, Geschwindigkeit, Dichte und die Umrechnung von Grad Celsius und Grad Fahrenheit in der Physik, Faustformel für den Maximalpuls beim Sport, Faustformeln für Reaktions- und Bremswege.

Vorschläge und Hinweise

- Die funktionale Interpretation geeigneter Formeln zielt auf Fragestellungen ab wie beispielsweise „Wie ändert sich …, wenn sich … verdoppelt?“. Der eigentliche Funktionsbegriff steht noch nicht zur Verfügung.
- Als Forscheraufgaben eignen sich beispielsweise folgende Probleme:
  - Um eine natürliche Zahl, die mit der Ziffer 5 endet, zu quadrieren, multipliziert man diejenige Zahl, die nach Abspalten der 5 noch übrigbleibt, mit der nächsten natürlichen Zahl und hängt an das Ergebnis eine 25 an. Begründe, warum dieses Verfahren zur korrekten Lösung führt.
  - Untersuchung, ob es außer der Zahl 1 noch weitere Zahlen gibt, die sowohl Quadrat- als auch Dreieckszahlen sind.
  - Untersuchung der Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Hinweise zum sprachsensiblen Fachunterricht

Fachwortschatz: ausklammern, ausmultiplizieren, die binomische Formel, der binomische Term, der Bruchterm, die Bruchgleichung, die Definitionsmenge, faktorisieren, die Fakultät, die Gleichwertigkeit, das Pascalsche Dreieck, die Potenzrechenregel

---

„Die beiden Terme sind gleichwertig.“

„Wir können die Zahl/die Variable … ausklammern.“

„Wir wenden die erste/zweite/dritte binomische Formel an.“

„Mithilfe der ersten/zweiten/dritten binomischen Formel können wir den Term faktorisieren.“

„Im Pascalschen Dreieck sind folgende Besonderheiten zu erkennen:“

„Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält.“

„Die erste/zweite/dritte binomische Formel kann mithilfe der folgenden Abbildung veranschaulicht werden.“

„Die Definitionsmenge der Bruchgleichung ist die Menge ‚$\mathbb{Q}$ ohne die Elemente…‘ “

„Bevor wir die Lösungsmenge einer Bruchgleichung angeben, müssen wir überprüfen, ob die berechnete Lösung Element der Definitionsmenge ist.“

„Wir können die Lösungen einer Gleichung als Schnittstellen der Graphen zweier Zuordnungen veranschaulichen.“

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Erstellen von Wertetabellen mit wissenschaftlichen Taschenrechnern oder einer Tabellenkalkulation
- Überprüfen von Termumformungen mit Computeralgebrasystemen

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Beweis verschiedener Sätze mit Hilfe von Termen, z. B.*
  - *Die Summe von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist durch 3 teilbar.*
  - *Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl.*
  - *Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist um 1 größer als das doppelte Produkt dieser Zahlen.*
  - *Vertauscht man bei einer beliebigen zweistelligen Zahl a die Ziffern, so erhält man eine Zahl b. Die Summe von a und b ist durch 11 teilbar.*
  - *Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.*
  - *Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.*
- *Untersuchung, ob die Summe von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen durch 4 teilbar ist*
- *Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks (z. B. Bildungsregeln, Zeilensummen, Folgen figurierter Zahlen)*
- *Term für die Anzahl der n-stelligen Zahlen im Zehnersystem*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Terme, Gleichungen und Ungleichungen
- Klassenstufe 8: Vielecke und Prismen
- Klassenstufe 8: Lineare Funktionen
- Klassenstufe 9: Quadratwurzeln und reelle Zahlen
- Klassenstufe 9: Ähnlichkeit

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Blaise Pascal (1623-1662)
- Geschwindigkeit, Dichte, Hooke’sches Gesetz in der Physik

Nachdem die Schülerinnen und Schüler besondere Vierecke bereits in den Klassenstufen 5 bzw. 6 kennengelernt haben, erfolgt in Klasse 8 eine genauere Untersuchung ihrer grundlegenden Eigenschaften. Hierauf aufbauend liegt ein Schwerpunkt des Themenfeldes auf einer einordnenden Gliederung der Vierecke nach unterschiedlichen Kriterien. Dabei wird zwischen definierenden und resultierenden Eigenschaften unterschieden.

An die intensive Beschäftigung mit den Eigenschaften der Vierecke schließen sich Flächeninhaltsberechnungen an. Dabei finden Strategien wie das Zurückführen auf den Flächeninhalt von Dreiecken bzw. Rechtecken sowie das Prinzip der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit Anwendung.

Der Übergang von der ebenen zur räumlichen Geometrie geschieht im Zuge der Betrachtung von Prismen, die als überstrichene Punktmenge bei der Parallelverschiebung eines ebenen Vierecks im Raum aufgefasst werden können. Betrachtungen, die in den Klassenstufen 5 bzw. 6 am Quader durchgeführt wurden, werden auf das Prisma erweitert, und der Quader wird als besonderes Prisma identifiziert. Analog zur Reihenfolge bei den Vierecken werden auch beim Prisma zunächst die Eigenschaften in den Fokus genommen, bevor Berechnungen durchgeführt werden.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Vierecke	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Ebene Vierecke als Punktmengen ○ Symbole A, B, C, D für die Eckpunkte ○ Symbole a, b, c, d für die Seiten und ihre Längen ○ Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für die Innenwinkel und ihre Maße (Größen) ○ Symbole e, f für die Diagonalen und ihre Längen • Winkelsumme im Viereck (Wiederholung) • Konvexe und nicht konvexe Vierecke	• unterscheiden die Abfolge der Bezeichnungen von Seiten und Winkel im Viereck von der im Dreieck, • geben an, dass bei einem konvexen Viereck alle Innenwinkelmaße kleiner als 180° sind, • geben an, dass bei einem konvexen Viereck beide Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen, • entscheiden begründet, ob ein vorgegebenes Viereck konvex ist.
Rechteck, Quadrat, Raute und Parallelogramm	
	Die Schülerinnen und Schüler
• <u>Definition</u>: Ein Viereck mit vier gleich großen Innenwinkeln heißt Rechteck. • <u>Definition</u>: Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt Quadrat. • <u>Definition</u>: Ein Viereck, bei dem einander gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm.	• nennen die definierenden Eigenschaften von Rechteck, Quadrat, Parallelogramm und Raute, • begründen, dass die Innenwinkel eines Rechtecks rechte Winkel sind, • entscheiden begründet, ob ein vorgegebenes Viereck ein Rechteck, Quadrat, Parallelogramm oder eine Raute ist.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

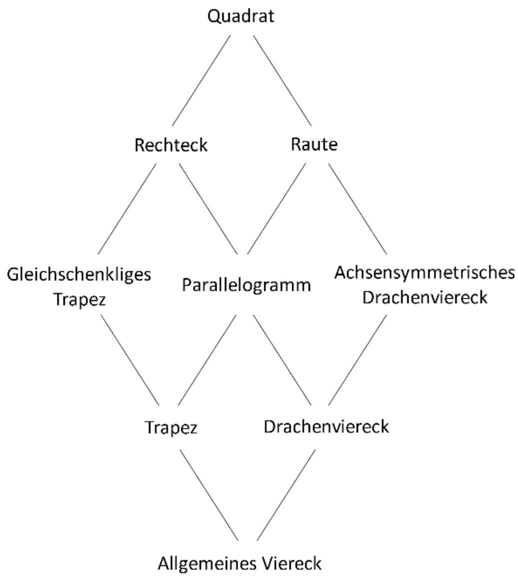
• <u>Definition</u>: Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten heißt Raute.
• Resultierende Eigenschaften von Seiten, Diagonalen und Innenwinkeln bei Rechteck (Wdh.), Quadrat (Wdh.), Parallelogramm und Raute
• <u>Satz</u>: Für Vierecke sind folgende Aussagen äquivalent:
  ○ Die Gegenseiten sind parallel.
  ○ Die Gegenseiten sind gleich lang.
  ○ Die Gegenwinkel sind maßgleich.
  ○ Zwei Seiten sind zueinander parallel und gleich lang.
  ○ Die Diagonalen halbieren einander.
• Symmetrieachsen und -zentren von Rechteck (Wdh.), Quadrat (Wdh.), Parallelogramm und Raute
	Die Schülerinnen und Schüler
	• zeichnen Parallelogramme und Rauten bei vorgegebenen Bestimmungsstücken,
	• unterscheiden definierende und resultierende Eigenschaften,
	• begründen am Beispiel des Parallelogramms einzelne Aussagen des angegebenen Satzes oder deren Kontraposition,
	• geben Symmetrieachsen und Symmetriezentren von Rechteck, Quadrat, Parallelogramm und Raute an.

Trapez und Drachenviereck

• <u>Definition</u>: Ein Viereck mit einem Paar paralleler Gegenseiten heißt Trapez.
  ○ Grundseiten, Schenkel, Höhe, Mittelparallele
  ○ Sonderfall: Gleichschenkliges Trapez
• <u>Definition</u>: Ein Viereck, bei dem eine Diagonale die zweite halbiert, heißt Drachenviereck.
  ○ Sonderfall: Achsensymmetrisches Drachenviereck
• Symmetrieachsen bei den Sonderfällen von Trapez und Drachenviereck
• Resultierende Eigenschaften von Seiten, Diagonalen und Innenwinkeln beim gleichschenkligen Trapez und beim achsensymmetrischen Drachenviereck
	Die Schülerinnen und Schüler
	• nennen die definierenden Eigenschaften von Trapez und Drachenviereck,
	• entscheiden begründet, ob ein vorgegebenes Viereck ein Trapez oder ein Drachenviereck ist,
	• zeichnen Trapeze und Drachenvierecke bei vorgegebenen Bestimmungsstücken,
	• geben Symmetrieachsen und Symmetriezentren von Vierecken an,
	• begründen einzelne resultierende Eigenschaften von gleichschenkligem Trapez und achsensymmetrischem Drachenviereck.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Das Haus der Vierecke



Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern den Aufbau des Hauses der Vierecke,
- lesen am Haus der Vierecke Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Vierecken ab,
- prüfen den Wahrheitswert von Aussagen zum Haus der Vierecke.

Flächeninhaltsberechnungen

- Strategien bei der Flächeninhaltsbestimmung:
    - Zurückführen auf den Flächeninhalt bereits bekannter Figuren
    - Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit
- Satz: Ein Parallelogramm mit einer Grundseite der Länge g und der zugehörigen Höhe der Länge h_g hat den Flächeninhalt A mit $A = g \cdot h_g$.
- Satz: Ein achsensymmetrisches Drachenviereck mit Diagonalen der Längen e und f hat den Flächeninhalt A mit $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$.
- Satz: Ein Trapez mit Grundseiten der Längen a und c und einer Höhe der Länge h hat den Flächeninhalt A mit $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$.

Die Schülerinnen und Schüler

- leiten die Flächeninhaltsformeln von Parallelogramm, achsensymmetrischem Drachenviereck und Trapez her,
- erläutern exemplarisch für eine Vierecksart zwei unterschiedliche Wege zur Herleitung der entsprechenden Flächeninhaltsformel,
- begründen eine Flächeninhaltsformel für die Raute gemäß der Vererbung im Haus der Vierecke,
- berechnen Flächeninhalte von Parallelogrammen, achsensymmetrischen Drachenvierecken, Rauten und Trapezen,
- berechnen bei geeigneten Vielecken aus dem Flächeninhalt und der Angabe ausreichend vieler Längen eine fehlende Länge.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Prisma	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Prisma als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Vielecks im Raum
  ○ Gerades bzw. schiefes Prisma
  ○ Grundbegriffe (Wiederholung): Grundfläche, Seitenfläche, Mantel, Oberfläche, Höhe
  ○ Sonderfall: Quader, Würfel
• Eigenschaften von Prismen
  ○ parallele und gleichlange Strecken
  ○ parallele und kongruente Flächen
	• identifizieren Prismen im Alltag,
	• beschreiben Prismen mithilfe der Grundbegriffe,
	• klassifizieren Prismen nach der Anzahl ihrer Seitenflächen,
	• geben an, dass alle zur Grundfläche parallelen Schnittflächen kongruent zur Grundfläche sind,
	• identifizieren Prismen anhand ihrer Netze.
	• zeichnen Schrägbilder von einfachen Prismen.

Berechnungen an geraden Prismen	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Satz: Ein gerades Prisma mit der Höhe h und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G hat das Volumen V mit $V = G \cdot h$. • Satz: Ein gerades Prisma mit der Höhe h und einer Grundfläche mit dem Umfang U hat den Mantelinhalt M mit $M = U \cdot h$. • Satz: Ein gerades Prisma mit einem Mantelinhalt M und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G hat den Oberflächeninhalt O mit $O = M + 2 \cdot G$.	• leiten aus der Gleichung für das Volumen eines Quaders die Gleichung für das Volumen eines geraden Prismas her, • berechnen das Volumen, den Mantelinhalt und den Oberflächeninhalt von geraden Prismen, • berechnen bei geeigneten Prismen aus der Angabe ausreichend vieler Größen eine fehlende Länge bzw. einen fehlenden Flächeninhalt, • veranschaulichen mit geeigneten Materialien, dass gerade und schiefe Prismen mit kongruenter Grundfläche volumengleich sind, • lösen Sachaufgaben zu Prismen und Objekten, die aus unterschiedlichen Körpern zusammengesetzt sind.

Basisbegriffe

Drachenviereck, Eigenschaften (definierend, resultierend), Ergänzungsgleichheit, Haus der Vierecke, Mantel (-inhalt), Mittelparallele, Viereck (konvex), Prisma (gerade, schief), Vieleck, Zerlegungsgleichheit

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- In Klassenstufe 5/6 wurde der Begriff „Maß eines Winkels“ eingeführt. Da in Aufgaben aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder (IQB) auch der Begriff „Größe eines Winkels“ verwendet wird, sollten die Schülerinnen und Schüler mit beiden Begriffen vertraut sein.
- Bei der Abgrenzung von konvexen und nicht konvexen Vielecken wird bewusst auf eine Definition verzichtet und der Schwerpunkt auf eine prototypische Begriffsbildung gelegt.
- Es empfiehlt sich, die resultierenden Eigenschaften der Vierecke in Wenn-dann-Form zu formulieren.
- Die Berechnungen an Trapezen können auch unter Zuhilfenahme der Mittenparallele erfolgen.
- Das Haus der Vierecke kann beispielsweise nach der Anzahl und Art der Symmetrien oder nach den Eigenschaften von Diagonalen angeordnet werden.
- Einen enaktiven Zugang zu den Diagonaleneigenschaften der unterschiedlichen Vierecksarten bietet beispielsweise das Heidelberger Winkelkreuz.
- Die exemplarische Erläuterung zweier unterschiedlicher Wege zur Herleitung einer Flächeninhaltsformel kann am Beispiel des Drachenvierecks erfolgen, indem einmal von Dreiecken und einmal von einem Rechteck ausgegangen wird. Beim Trapez bietet sich die Gegenüberstellung des Zerlegens sowie des Drehens und Aneinanderlegens an.
- Das Basteln von Körpermodellen und Netzen, beispielsweise aus Papier, mithilfe von Knete und Zahnstochern oder mithilfe von Bausystemen, unterstützt den Aufbau von Raumvorstellungen.
- Die Volumengleichheit eines geraden und eines entsprechenden schiefen Prismas kann beispielsweise mithilfe von Zettelstapeln oder Pappuntersetzern veranschaulicht werden.
- Die Frage nach unterschiedlichen Prismen zu einem gegebenen Volumen bzw. einem gegebenen Oberflächeninhalt regt eine vertiefte Auseinandersetzung sowohl mit funktionalen Zusammenhängen als auch mit der möglichen Formenvielfalt an.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Raumgeometrische Fermi-Aufgaben, z.B. zum Volumen von Bauschuttcontainern oder zum Papierverbrauch bei Verpackungsmaterialien

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Veranschaulichung von Körpern mithilfe einer Geometriesoftware
- Veranschaulichung des Abwickelns der Oberfläche mithilfe einer Geometriesoftware
- Die Interpretation einer Formel als funktionaler Zusammenhang eröffnet die Möglichkeit, mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge die Auswirkungen von Vergrößerungen / Verkleinerungen zu untersuchen.

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Parkettierungen der Ebene mit Vierecken*
- *Flächenschwerpunkt eines Vierecks*
- *Seitenmittenparallelogramm eines Vierecks (Satz von Varignon)*
- *Tangenten- und Sehnenvierecke*
- *Füllgraphen*
- *Begründung, dass bei einem Trapez die Summe der Maße der beiden Innenwinkel an einem Schenkel 180° beträgt*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Figuren und Körper
- Klassenstufen 5/6: Flächen- und Rauminhalte
- Klassenstufe 7: Winkel in Figuren
- Klassenstufe 8: Kreis und Zylinder
- Klassenstufe 10: Pyramide, Kegel, Kugel

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Kräfteparallelogramm in der Physik
- Verzerrte Darstellung von Rechtecken bei der Zentralperspektive
- Prismen in der Optik
- Baukörper in der Architektur, Dachkonstruktionen
- Recherche von Berufen bzw. Berufsfeldern und Berufsbiografien, in denen z. B. Architektur und Konstruktionen eine besondere Rolle spielen

Aufbauend auf den in Klassenstufe 7 behandelten Zuordnungen wird nun der Funktionsbegriff entwickelt. Mit Funktionen lernen die Schülerinnen und Schüler ein mathematisches Werkzeug kennen, das sich als universelles Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, insbesondere auch in den Naturwissenschaften, erweist. Im Mittelpunkt stehen das Erkennen funktionaler Abhängigkeiten sowie deren formale Beschreibung mit Hilfe von Funktionstermen und die graphische Veranschaulichung.

Lineare Funktionen bilden die erste Funktionsklasse, mit der sich die Schülerinnen und Schüler tiefergehend beschäftigen. Dabei lernen sie nicht nur deren spezielle, sondern auch grundlegende Eigenschaften von Funktionen kennen, die in höheren Klassenstufen im Kontext weiterer Funktionsklassen immer wieder eine Rolle spielen. Die Eigenschaften der linearen Funktionen und ihrer Graphen werden systematisch zur Lösung und Interpretation innermathematischer und anwendungsbezogener Problemstellungen genutzt.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Zuordnungen (Wiederholung)	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Zuordnungen
• Darstellung von Zuordnungen zwischen Zahlenmengen mit Hilfe von
  ○ Texten
  ○ Tabellen
  ○ Graphen
  ○ Termen
	• nennen Beispiele für Zuordnungen, auch aus dem Alltag,
	• stellen Zuordnungen mithilfe von Texten, Tabellen, Graphen und Termen dar und wechseln zwischen diesen Darstellungen.

Funktionen als spezielle Zuordnungen	
	Die Schülerinnen und Schüler

• <u>Definition</u>: Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element einer Zahlenmenge D genau ein Element einer Zahlenmenge Z zuordnet.
  ○ D: Definitionsmenge
  ○ Z: Zielmenge
  ○ Schreibweise: $f: D \to Z; x \mapsto f(x)$
• Sprechweisen:
  ○ f: Funktionsname
  ○ x: Variable
  ○ $f(x)$: Funktionsterm
  ○ x_0: Stelle oder x-Wert
	• entscheiden begründet, ob eine vorgegebene Zuordnung eine Funktion ist,
	• bestimmen graphisch und rechnerisch Funktionswerte zu vorgegebenen Stellen,
	• erstellen Wertetabellen von Funktionen (auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen),
	• zeichnen Graphen von Funktionen, (auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen),
	• geben zu geeigneten Funktionen eine Funktionsgleichung an,
	• bestimmen graphisch und bei geeigneten Funktionen rechnerisch Stellen zu vorgegebenen Funktionswerten.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
◦ $f(x_0)$: Funktionswert an der Stelle x_0 oder y-Wert ◦ $y = f(x)$: Funktionsgleichung ◦ $x \mapsto f(x)$: Funktionsvorschrift • Wertetabelle • Funktionsgraph oder Graph von f, Symbol G_f • Wertemenge, Symbol W • Bezeichnungen: ◦ Kehrwertfunktion ◦ Betragsfunktion ◦ Quadratfunktion	Die Schülerinnen und Schüler • überprüfen rechnerisch, ob ein vorgegebener Punkt auf dem Funktionsgraphen liegt, • bestimmen anhand des Funktionsgraphen die Wertemenge einer Funktion, • lösen Sachaufgaben (auch im Kontext BNE möglich), • geben zur Kehrwertfunktion, zur Betragsfunktion und zur Quadratfunktion jeweils einen entsprechenden Funktionsterm an und skizzieren den jeweiligen Graph.

Proportionale Funktionen

• <u>Definition</u>: Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = m \cdot x$ (mit $m \in \mathbb{Q}$), heißt proportionale Funktion. • Eigenschaften: ◦ Vielfacheneigenschaft ◦ Quotientengleichheit: – konstanter Quotient als Proportionalitätsfaktor m ◦ Additivität ◦ Graph: Ursprungsgerade • Steigungsbegriff: ◦ Steigungsdreiecke ◦ konstanter Differenzenquotient $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$ ◦ Steigung m • Wachstumsverhalten ◦ steigend (wachsend) $(m > 0)$ ◦ fallend $(m < 0)$ ◦ konstant bleibend $(m = 0)$	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden begründet, ob eine vorgegebene Funktion eine proportionale Funktion ist, • zeichnen Graphen proportionaler Funktionen (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge), • ermitteln Steigungen von Geraden, • ordnen Graphen und Terme proportionaler Funktionen einander begründet zu, • bestimmen Funktionsgleichungen von proportionalen Funktionen (z. B. anhand von Wertetabellen, Graphen, Punkten auf Funktionsgraphen, verbalen Beschreibungen), • beschreiben die Auswirkungen der Änderungen des Parameters m auf den Funktionsgraphen, • begründen, dass nicht jede Gerade Graph einer proportionalen Funktion ist.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Lineare Funktionen	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Definition: Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = m \cdot x + n$ (mit $m, n \in \mathbb{Q}$) heißt lineare Funktion.
• Graph:
  ○ Gerade
  ○ y-Achsenschnitt n
  ○ Steigung m:
    – $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
    – Wachstumsverhalten
• Sonderfälle
  ○ konstante Funktionen ($m = 0$)
  ○ proportionale Funktionen ($n = 0$)
• Lagebeziehungen von Graphen linearer Funktionen
  ○ Parallelität:
    – Bedingung: $m_1 = m_2$
  ○ Schnittpunkt:
    – Sonderfall Orthogonalität, Bedingung: $m_1 \cdot m_2 = -1$
• Nullstelle als x-Koordinate des Schnittpunktes des Graphen mit der x-Achse
• Begriffe „Änderungsrate“ und „Anfangswert“
	• entscheiden begründet, ob eine vorgegebene Funktion eine lineare Funktion ist,
	• zeichnen Graphen linearer Funktionen (auch mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen, auch mit Schieberegler),
	• erläutern, dass eine lineare Funktion durch Angabe zweier zugehöriger Wertepaare eindeutig festgelegt ist,
	• beschreiben die Auswirkungen der Änderungen der Parameter m und n auf den Graphen,
	• bestimmen graphisch y-Achsenabschnitte und Steigungen von Geraden,
	• zeichnen eine Gerade bei Vorgabe eines Punktes und der Steigung,
	• bestimmen rechnerisch die Funktionsgleichung aus einem Punkt und der Steigung des Graphen (Punkt-Steigungs-Form),
	• bestimmen rechnerisch die Funktionsgleichung aus zwei Punkten des Graphen (Zwei-Punkte-Form),
	• ordnen Graphen und Terme linearer Funktionen begründet einander zu,
	• begründen die Parallelitätsbedingung,
	• entdecken mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen die Orthogonalitätsbedingung
	• untersuchen die Lagebeziehung zweier Geraden anhand der zugehörigen Funktionsgleichungen,
	• stellen Funktionsgleichungen von Geraden auf, die parallel bzw. senkrecht zu einer vorgegebenen Geraden verlaufen,
	• begründen, dass nicht jede Gerade Graph einer linearen Funktion ist.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen rechnerisch und zeichnerisch die Nullstelle einer linearen Funktion, • bestimmen rechnerisch und zeichnerisch den Schnittpunkt zweier Geraden, • lösen Sachaufgaben (auch im Kontext BNE möglich).

Basisbegriffe

Änderungsrate, Anfangswert, Definitionsmenge, Differenzenquotient, Funktion (linear, proportional), Funktionsgleichung (-name, -term, -wert), Parallelitätsbedingung, Orthogonalitätsbedingung, Schnittpunkt, Steigung, Steigungsdreieck, Stelle (Null-), Variable, Wachstumsverhalten, Wertemenge, y-Achsenabschnitt

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Das Themenfeld „Funktionen“ baut auf dem Themenfeld „3. Zuordnungen“ aus Klassenstufe 7 auf. Insbesondere im Lernbereich „Proportionale Funktionen“ sind zahlreiche Wiederholungen aus der vorangegangen Klassenstufe zu finden.
- In diesem Themenfeld gilt es insbesondere die Grundvorstellungen von Funktionen aufzubauen:
  - Zuordnungsaspekt: Welche Zahl/Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet?
  - Kovariationsaspekt: Wie verändert sich die eine Zahl/Größe mit der anderen?
  - Funktion als Ganzes: Wie verhält sich die Funktion als Ganzes? (z. B.: Welche Form hat das Schaubild?)
- Das Verständnis zu linearen und nichtlinearen Zusammenhängen kann durch eigene Experimente und Datenerhebungen sowie beispielsweise durch den enaktiven Zugang beim „Gehen von Graphen“ gefördert werden. Hierbei bewegt sich eine Person in Abhängigkeit von der Zeit auf einen Stuhl zu oder von ihm weg und das entsprechende Entfernungs-Zeit-Diagramm soll erstellt werden. Umgekehrt kann auch ein vorgegebenes Diagramm in eine Bewegung umgesetzt werden.
- Die Kehrwertfunktion und die Quadratfunktion (Flächeninhalt) können als kontrastierende Beispiele für Funktionsgraphen mit nichtlinearem Verlauf dienen.
- Die umgekehrt proportionalen Funktionen werden im Rahmen der Behandlung der Potenzfunktionen in Klassenstufe 10 eingeführt.
- Die Parallelitätsbedingung kann anhand kongruenter Steigungsdreiecke begründet werden, die Orthogonalitätsbedingung anhand von Steigungsdreiecken. Beide Bedingungen können jeweils in beide Richtungen gelesen und als „Genau-dann-wenn-Satz“ formuliert werden.

Vorschläge und Hinweise

- Als anwendungsorientierte Aufgaben bieten sich beispielsweise Recherchen zu und Analysen von linearen Gebühren- und Tarifsystemen im Alltag an.
- mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Zahlreiche Fermiaufgaben zu BNE (z. B. tropfender Wasserhahn, Energieverbrauch durch ungenutzte Ladegeräte in Steckdosen, etc.) lassen sich mithilfe proportionaler oder linearer Funktionen lösen.

Hinweise zum sprachsensiblen Fachunterricht

Fachwortschatz: die Änderungsrate; der Anfangswert; die Definitionsmenge; der Differenzenquotient; die lineare, proportionale Funktion; die Funktionsgleichung; der Funktionsname; der Funktionsterm; der Funktionswert; der Funktionsgraph; der Graph; die Nullstelle; die Parallelitätsbedingung; die Orthogonalitätsbedingung; der Schnittpunkt; die Steigung; das Steigungsdreieck; die Stelle; die Variable; das Wachstumsverhalten; die Wertemenge; der y-Achsenabschnitt

---

„Die Änderungsrate/Der Anfangswert/Der y-Achsenabschnitt beträgt …“

„Die Definitionsmenge/Die Wertemenge ist die Menge $\mathbb{Q}$.“

„Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade“

„Der Schnittpunkt der beiden Graphen hat die Koordinaten …“

„Die Definitionsmenge/Die Wertemenge ist die Menge mit den Elementen…“

„Der Funktionswert von … an der Stelle … ist …“

„Die Steigung des Graphen/des Funktionsgraphen ist …“

„Die Funktionsgleichung lautet: f von x = …“

„Die Funktion ist eine/keine proportionale/lineare Funktion, da …“

„Am Funktionsterm der linearen Funktion f kann man den y-Achsenabschnitt … und die Steigung … ablesen.“

„Um die Nullstelle einer Funktion zu bestimmen, setzt man den Funktionsterm gleich Null.“

„Die Nullstelle einer Funktion gibt an, an welcher Stelle der Funktionsgraph die x-Achse schneidet.“

„Der y-Achsenabschnitt gibt an, bei welchem Funktionswert der Graph die y-Achse schneidet.“

„Da beide Funktionen die gleiche Steigung haben, verlaufen ihre Graphen parallel zueinander.“

„Da das Produkt der Steigungen der beiden Funktionen -1 ergibt, schneiden sich die beiden Funktionsgraphen orthogonal.“

Vorschläge und Hinweise

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Einsatz eines Funktionenplotters mit Schiebereglern für m und n zur Untersuchung der Graphen von proportionalen und linearen Funktionen
- Erstellen von Wertetabellen mithilfe des Taschenrechners oder einer Tabellenkalkulation
- Auswertung von sportlichen Aktivitäten (Läufe, Wandern, etc.) mithilfe von Smartwatches bzw. Sportuhren und entsprechenden Apps

Fakultative Inhalte

- *Untersuchung von Beispielen für nichtlineares Wachstum mit Tabellenkalkulation, z. B. Zinseszins*
- *Achsenabschnittsform von linearen Funktionen:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Terme, Gleichungen und Ungleichungen
- Klassenstufe 7: Zuordnungen
- Klassenstufe 8: Terme
- Klassenstufe 9: Lineare Gleichungssysteme
- Klassenstufe 9: Quadratische Funktionen und Gleichungen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Ohm'sches Gesetz
- Dichte
- gleichförmige Bewegung
- Hooke'sches Gesetz
- Schweredruck des Wassers
- Umrechnungen zwischen der Celsius-Skala und der Fahrenheit-Skala
- Spezifische Wärmekapazität
- lineare Tarifsysteme
- Recherche von Berufsfeldern, in denen z. B. lineare Tarifsysteme eine besondere Rolle spielen

Nachdem die Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen 5 bzw. 6 Kreise als besondere Punktmenge kennengelernt und in Klassenstufe 7 im Rahmen der proportionalen Zuordnungen den Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang erforscht haben, erfolgen in Klassenstufe 8 zusehends auch rechnerische Betrachtungen. Dabei orientiert sich die Herangehensweise, zunächst die Eigenschaften der geometrischen Objekte in den Fokus zu nehmen, an vorhergehenden Themenfeldern.

Analog zum Vorgehen im Themenfeld „Vielecke und Prismen“ erfolgt der Übergang von der ebenen zur räumlichen Geometrie bei der Betrachtung von Zylindern als überstrichene Punktmenge bei der Parallelverschiebung von Kreisen im Raum. Die Analogie zum Prisma kann dabei gewinnbringend genutzt werden.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Kreis	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Grundbegriffe ○ Mittelpunkt, Radius, Durchmesser (Wiederholung) ○ Mittelpunktswinkel, Kreissektor (Wiederholung) ○ Kreisbogen ○ Kreissegment	• identifizieren Kreise und Kreisfiguren im Alltag, • verwenden die Grundbegriffe bei der Beschreibung von Kreisen und Kreisfiguren.
Umfang eines Kreises	
	Die Schülerinnen und Schüler
• <u>Satz</u>: Ein Kreis mit dem Durchmesser d bzw. dem Radius r hat den Umfang U mit $U = \pi \cdot d$ bzw. $U = 2 \cdot \pi \cdot r$. ○ Kreiszahl π als Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen; Näherungswert $3{,}14$ • <u>Satz</u>: Für die Länge b_α eines Kreisbogens mit dem Radius r und einem Mittelpunktswinkel mit dem Maß α gilt: $b_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$ ○ Begriff: Bogenlänge	• geben an, dass der Umfang eines Kreises ungefähr dreimal so groß wie sein Durchmesser ist, • berechnen den Umfang eines Kreises bei vorgegebenem Durchmesser bzw. Radius und umgekehrt, • leiten die Formel zur Berechnung der Bogenlänge her, • berechnen Bogenlängen, Radien bzw. Maße von Mittelpunktswinkeln bei Kreissektoren.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Flächeninhalt eines Kreises	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Satz: Ein Kreis mit dem Radius r hat den Flächeninhalt A mit $A = \pi \cdot r^2$. • Satz: Für den Flächeninhalt A_α eines Kreissektors mit dem Radius r und einem Mittelpunktswinkel mit dem Maß α gilt: $A_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$	• leiten ausgehend von der Zerlegung eines Kreises in gleichgroße Sektoren und deren näherungsweiser Anordnung als Rechteck eine Formel für den Flächeninhalt eines Kreises her, • berechnen den Flächeninhalt eines Kreises bei vorgegebenem Durchmesser bzw. Radius und umgekehrt, • untersuchen, wie sich eine Veränderung des Kreisradius‘ auf den Flächeninhalt auswirkt, • leiten die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreissektors her, • berechnen Flächeninhalte, Radien bzw. Maße von Mittelpunktswinkeln bei Kreissektoren, • berechnen Flächeninhalte und Umfänge von Kreisfiguren, • lösen Sachaufgaben.
Zylinder	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Zylinder als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Kreises im Raum
  ○ Gerader bzw. schiefer Zylinder
  ○ Analogie zum Prisma
  ○ Grundbegriffe (Wiederholung): Höhe, Grundfläche, Mantel, Mantellinie, Oberfläche
• Eigenschaften von Zylindern
  ○ parallele und kongruente Flächen
  ○ abwickelbare Oberfläche
	• identifizieren Zylinder im Alltag,
	• beschreiben Zylinder mithilfe der Grundbegriffe,
	• skizzieren Zylinder,
	• geben an, dass alle zur Grundfläche parallelen Schnittflächen kongruent zur Grundfläche sind,
	• zeichnen Netze von geraden Zylindern.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Berechnungen an geraden Zylindern

	Die Schülerinnen und Schüler
• Satz: Ein gerader Zylinder mit einer Höhe h und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G hat das Volumen V mit $V = G \cdot h$. • Satz: Ein gerader Zylinder mit einer Höhe h und einer Grundfläche mit dem Umfang U hat den Mantelinhalt M mit $M = U \cdot h$. • Satz: Ein gerader Zylinder mit einem Mantelinhalt M und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G hat den Oberflächeninhalt O mit $O = M + 2 \cdot G$.	• geben in Analogie zum Prisma eine Gleichung für das Volumen eines geraden Zylinders an, • berechnen das Volumen, den Mantelinhalt und den Oberflächeninhalt von geraden Zylindern, • berechnen bei geraden Zylindern aus der Angabe ausreichend vieler Größen eine fehlende Länge bzw. einen fehlenden Flächeninhalt, • veranschaulichen mit geeigneten Materialien, dass gerade und schiefe Zylinder mit kongruenter Grundfläche volumengleich sind, • bearbeiten Sachaufgaben zu Zylindern und Objekten, die aus unterschiedlichen Körpern zusammengesetzt sind.

Basisbegriffe

Abwickelbar, Analogie, Bogenlänge, Kreisbogen, Kreissegment, Kreiszahl π, Zylinder (gerade, schief)

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Der Begriff Kreissegment wird nur im Sinne eines vollständigen Wortschatzes zum Kreis eingeführt, Berechnungen zu Kreissegmenten sind jedoch nicht notwendig.
- Die Herleitung der Flächeninhaltsformel eines Kreises enthält die intuitive Grenzbetrachtung für eine immer größer werdende Anzahl von Kreissektoren.
- Bei Berechnungen an Zylindern muss bedacht werden, dass in dieser Klassenstufe noch keine Quadratwurzeln berechnet werden können.
- Basteln von Körpermodellen und Netzen aus Papier unterstützt den Aufbau von Raumvorstellungen.
- Als „Forscheraufgaben“ können Umfüllexperimente, raumgeometrische Fermi-Aufgaben sowie die Berechnung der Gewindeganglänge einer Maschinenschraube dienen.

Vorschläge und Hinweise

- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
    - Abschätzungen zum jährlichen Blechverbrauch durch die Nutzung von Konservendosen in der eigenen Familie / im eigenen Wohnort
    - Abschätzungen zum Platzbedarf der Bevölkerung Deutschlands / der Welt mithilfe von Kreisen, wenn man alle Menschen nebeneinander aufstellt („Reicht die Grundfläche der Insel Mallorca für 8 Milliarden Menschen?“).

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Veranschaulichung von Körpern mithilfe einer Geometriesoftware
- Veranschaulichung des Abwickelns der Oberfläche mithilfe einer Geometriesoftware
- Veranschaulichung der Herleitung der Flächeninhaltsformel eines Kreises mithilfe einer Geometriesoftware
- Die Interpretation einer Formel als funktionaler Zusammenhang eröffnet die Möglichkeit, mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge die Auswirkungen von Vergrößerungen / Verkleinerungen zu untersuchen.

Fakultative Inhalte

- *Formel für den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt eines Kreissektors und der zugehörigen Bogenlänge*
- *Füllgraphen (insbesondere unter Beachtung des Steigungsverhältnisses bei gegebenem Radienverhältnis gestapelter Zylinder)*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Figuren und Körper
- Klassenstufen 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie
- Klassenstufe 7: Zuordnungen
- Klassenstufe 8: Vielecke und Prismen
- Klassenstufe 9: Quadratwurzeln und reelle Zahlen
- Klassenstufe 10: Pyramide, Kegel, Kugel

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Veränderungen des Wasserpegels bei Pools / Schwimmbecken, die als Zylinder angenähert werden können
- Dichte von (Hohl-)Körpern in der Physik
- Auftrieb bei zylinderförmigen Körpern in der Physik
- Baukörper in der Architektur
- Bonaventura Cavalieri (1598-1647)
- Recherche von Berufsfeldern, in denen Kreis und Zylinder eine besondere Rolle spielen, z.B. Technik und Architektur

6. Rechnen in anderen Zahlensystemen *(nur Informatik-Zweig)* — Mathematik 8

Computer speichern Daten unterschiedlicher Art mithilfe von nur zwei Zeichen (0 und 1), sodass dem Binärsystem in der Informatik eine zentrale Bedeutung zukommt.

In diesem Themenfeld werden zunächst die Umrechnungen zwischen Dezimal- und Binärsystem aus den Klassenstufen 5 bzw. 6 in Mathematik sowie aus der Klassenstufe 7 in Informatik wiederholt.

Nachdem für Zahlen in Dezimaldarstellung bereits aus der Grundschule schriftliche Rechenverfahren bekannt sind, werden die schriftliche Addition sowie die schriftliche Multiplikation nun auf das Binärsystem übertragen.

Mit dem Hexadezimalsystem wird ein weiteres Stellenwertsystem betrachtet, das in der Informatik ebenfalls von großer Bedeutung ist und eine deutlich kompaktere Darstellung als die Binärdarstellung ermöglicht. Den Abschluss bildet der Ausblick auf weitere Zahlensysteme, beispielsweise auch solche, die von historischer Bedeutung sind.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Das Binärsystem (Dualsystem)	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Binärsystem (Wiederholung)
  ○ Stellenwert
  ○ Stellenwerttafel
• Anzahl der n-stelligen Zahlen in Binärdarstellung: 2^{n-1}
• Divisions-Algorithmus zur Umwandlung von der Dezimal- in die Binärdarstellung (Division durch 2 mit Rest)
	• geben an, dass die Stellenwerte im Binärsystem Potenzen von 2 sind,
	• wandeln Zahlen bis 1024 von der Dezimal- in die Binärdarstellung um und umkehrt,
	• begründen, dass im Binär- sowie im Dezimalsystem führende Nullen den Wert der Zahl nicht verändern,
	• bestimmen bei einer gegebenen Zahl in Dezimaldarstellung die Anzahl der Stellen in Binärdarstellung ohne die Umwandlung durchzuführen,
	• bestimmen einen Term für die Anzahl der n-stelligen Zahlen im Binärsystem,
	• erklären, woran man gerade bzw. ungerade Zahlen in Binärdarstellung erkennen kann,
	• wandeln mithilfe des Divisions-Algorithmus Zahlen von der Dezimal- in die Binärdarstellung um,
	• erklären den Divisions-Algorithmus.

6. Rechnen in anderen Zahlensystemen *(nur Informatik-Zweig)* — Mathematik 8

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**

Rechnen im Binärsystem

Inhaltsbezogene Kompetenzen

- Rechenregeln für die Addition
  - $0_2 + 0_2 = 0_2$
  - $0_2 + 1_2 = 1_2$
  - $1_2 + 0_2 = 1_2$
  - $1_2 + 1_2 = 10_2$
- Geometrische Summenformel für die Basis 2:
  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$
- Vorgänger und Nachfolger bei Zahlen in Binärdarstellung
- Multiplikation zweier Zahlen in Binärdarstellung
  - Multiplikation einer Zahl in Binärdarstellung mit einer Zahl der Form $10_2, 100_2, 1000_2, \ldots$
  - Multiplikation zweier Zahlen in Binärdarstellung

Prozessbezogene Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

- entdecken die Rechenregeln für die Addition im Binärsystem und formulieren diese.
- addieren Zahlen in Binärdarstellung schriftlich,
- leiten die geometrische Summenformel für die Basis 2 her,
- begründen, dass $\underbrace{11\ldots1}_{n-mal}{}_2 + 1_2 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-mal}{}_2$ gilt,
- bestimmen Vorgänger und Nachfolger von Zahlen in Binärdarstellung,
- multiplizieren Zahlen in Binärdarstellung mit Zahlen der Form $10_2, 100_2, 1000_2, \ldots$
- multiplizieren Zahlen in Binärdarstellung schriftlich.

Das Hexadezimalsystem

Inhaltsbezogene Kompetenzen

- Hexadezimalsystem
  - Ziffern im Hexadezimalsystem
  - Stellenwert
  - Stellenwerttafel
- Umwandlung von der Hexadezimal- in die Binärdarstellung mithilfe von „Viererpäckchen“

Prozessbezogene Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

- geben an, dass die Stellenwerte im Hexadezimalsystem Potenzen von 16 sind,
- wandeln Zahlen von der Dezimal- in die Hexadezimaldarstellung um und umgekehrt,
- wandeln Zahlen von der Hexadezimal- in die Binärdarstellung um und umgekehrt,
- wandeln mithilfe von „Viererpäckchen“ Zahlen von der Hexadezimal- in die Binärdarstellung um,
- erläutern die Umwandlung von der Hexadezimal- in die Binärdarstellung mithilfe von „Viererpäckchen“.

6. Rechnen in anderen Zahlensystemen *(nur Informatik-Zweig)* — Mathematik 8

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Weitere Zahlensysteme	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Weitere Stellenwertsysteme • Historische Zahlensysteme	• beschreiben den Aufbau eines weiteren Stellenwertsystems (z. B. des Fünfersystems). • wandeln Zahlen aus einer Darstellung in einem weiteren Stellenwertsystem in die Dezimaldarstellung um und umgekehrt, • untersuchen historische Zahlensysteme (z. B. der Babylonier, der Maya, der Ägypter).

Basisbegriffe

Binärsystem, geometrische Summenformel, Hexadezimalsystem

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Während bei der Behandlung der Stellenwertsysteme in Klassenstufe 5 noch keine Potenzen zur Verfügung stehen und daher dort mit Stufenzahlen gearbeitet wird, können die Schülerinnen und Schüler hier mit der Potenzschreibweise arbeiten.
- Bei der Umwandlung von Zahlen aus der Dezimal- in die Binärdarstellung mittels „Division durch 2“ gibt der erste Rest die Einerstelle und der als Letztes verbleibende Rest die höchstwertige Stelle der entsprechenden Zahl in Binärdarstellung an.
- Vor der Erarbeitung der Rechenregeln zur Addition von Zahlen in Binärdarstellung empfiehlt sich eine kurze Wiederholung der schriftlichen Addition im Dezimalsystem.
- Die Umwandlung von Zahlen aus der Hexadezimal- in die Binärdarstellung kann schnell mittels „Viererpäckchen“ erfolgen. Dazu werden die einzelnen Ziffern der Zahl in Hexadezimaldarstellung in 4-stellige Zahlen in Binärdarstellung („Viererpäckchen“) umgewandelt und aneinandergereiht.
- Einen möglichen Anwendungskontext für Zahlen in Hexadezimaldarstellung bieten Farbangaben bei Grafikprogrammen im RGB-Modell.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Programmierung eines Algorithmus zur Umrechnung vom Dezimal- ins Binärsystem
- Programmierung eines Algorithmus zur Umrechnung vom Binär- ins Dezimalsystem
- Programmierung eines Algorithmus zur Umrechnung vom Hexadezimal- ins Binärsystem

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Schriftliche Subtraktion zweier Binärzahlen (Minuend größer als der Subtrahend)*
- *Potenzieren von Binärzahlen*
- *Division zweier Binärzahlen*
- *Rechnen in weiteren Zahlensystemen*
- *Umrechnungen mithilfe des Horner-Schemas*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Natürliche Zahlen
- Klassenstufe 5: Teilbarkeit
- Klassenstufe 8: Terme

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Historische Zahlensysteme (z. B. Zahlensysteme der Babylonier, der Ägypter, der Maya)
- Informatik: Klassenstufen 7 und 9
- Informatik: Codierung, Funktionsweise von Computern, digitale Schaltungen
- Schaltungen im Bereich der Technik
- Recherche von Berufen bzw. Berufsfeldern und Berufsbiografien, in denen alternative Zahlensysteme eine besondere Rolle spielen, z. B. in den Bereichen Informatik und Technik

7. Aussagenlogik *(nur Informatik - Zweig)* Mathematik 8

Anknüpfend an die Behandlung von Aussageformen und Aussagen in Klassenstufe 7 beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler des Informatikzweiges in diesem Themenfeld mit Aussagen, Negationen von Aussagen sowie unterschiedlichen Verknüpfungen zweier Aussagen. Zentral sind dabei neben Wahrheitstafeln verbale Beschreibungen. Verbindungen und Diskrepanzen zum Alltagssprachgebrauch werden beispielsweise beim ein- bzw. ausschließenden „oder“ thematisiert. Tabellenkalkulationsprogramme stellen ein nützliches Hilfsmittel beim Erstellen von Wahrheitstafeln dar.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Aussagen	
	Die Schülerinnen und Schüler

• <u>Bezeichnung</u>: Eine Aussage a ist ein sprachlicher oder formaler Ausdruck, der genau einen der beiden Wahrheitswerte (w: wahr, f: falsch) besitzt.
• Negation als Verneinung einer Aussage
  ○ Symbol: $\bar{a}$
  ○ Wahrheitstafel
  ○ $\overline{(\bar{a})} = a$
	• entscheiden begründet, ob es sich bei einem geeigneten sprachlichen Ausdruck aus dem Alltag um eine Aussage handelt,
	• entscheiden begründet, ob es sich bei einem formalen Ausdruck um eine Aussage handelt,
	• geben den Wahrheitswert einer Aussage an,
	• geben die Negation einer Aussage an,
	• beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer Aussage und dem Wahrheitswert ihrer Negation.

Konjunktion, Disjunktion und Kontravalenz	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Konjunktion zweier Aussagen a und b (Und- bzw. AND-Verknüpfung)
  ○ Symbol: $a \land b$
  ○ Wahrheitstafel
• Disjunktion zweier Aussagen a und b als einschließendes „oder“ (Oder- bzw. OR-Verknüpfung)
  ○ Symbol: $a \lor b$
  ○ Wahrheitstafel
• Verknüpfungen von Aussagen mit den Operatoren $\overline{\ }$, $\land$ und $\lor$
  ○ Vorrangregel: Negation vor Konjunktion vor Disjunktion
	• stellen die Wirkungsweise von Und- bzw. Oder-Schaltungen aus dem Alltag in Tabellen dar,
	• formulieren die Konjunktion und die Disjunktion zweier Aussagen in Worten,
	• beschreiben den grundlegenden Aufbau von Wahrheitstafeln zu Verknüpfungen von Aussagen,
	• stellen Wahrheitstafeln zu Verknüpfungen zweier Aussagen mit Kombinationen der Operatoren $\overline{\ }$, $\land$ und $\lor$ auf,
	• formulieren die Kontravalenz zweier Aussagen in Worten,
	• beschreiben den Unterschied zwischen dem einschließenden und dem ausschließenden „oder“.

7. Aussagenlogik *(nur Informatik - Zweig)* — Mathematik 8

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• Kontravalenz zweier Aussagen a und b als ausschließendes „oder“ (exklusive Oder- bzw. XOR-Verknüpfung)
  ○ Symbol: $a \oplus b$
  ○ Wahrheitstafel
	Die Schülerinnen und Schüler
	• erläutern die Mehrdeutigkeit durch das Nebeneinander von ein- und ausschließendem „oder“ im Alltag mithilfe von Beispielen,
	• ermitteln ein logisches Äquivalent zum verbalen Ausdruck „entweder a oder b“.

NAND und NOR

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• <u>NAND-Verknüpfung</u>:
  ○ Symbol $a \overline{\wedge} b$
  ○ Wahrheitstafel
  ○ Sind a und b zwei Aussagen, dann ist die Verknüpfung $a \overline{\wedge} b$ genau dann falsch, wenn beide Aussagen wahr sind; anderenfalls ist sie wahr.
  ○ NAND als Negation der Konjunktion
• <u>NOR-Verknüpfung</u>:
  ○ Symbol $a \overline{\vee} b$
  ○ Wahrheitstafel
  ○ Sind a und b zwei Aussagen, dann ist die Verknüpfung $a \overline{\vee} b$ genau dann wahr, wenn beide Aussagen falsch sind; anderenfalls ist sie falsch.
  ○ NOR als Negation der Disjunktion
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen die Verknüpfungen NAND und NOR mit Hilfe von Venn-Diagrammen,
	• stellen Wahrheitstafeln zu Verknüpfungen zweier Aussagen mit Kombinationen der Operatoren $\overline{}$, $\overline{\wedge}$ und $\overline{\vee}$ auf,
	• nennen Alltagsbeispiele für die Anwendung von NAND- und NOR-Verknüpfungen.

Basisbegriffe

Aussage, Disjunktion, Konjunktion, Kontravalenz, NAND, Negation, NOR, Verknüpfung, Wahrheitstafel, Wahrheitswert

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Zahlreiche Materialien finden sich auf den Internetseiten des Lehrerfortbildungsservers Baden-Württemberg (Stand April 2024).
- Einen möglichen Anwendungskontext für dieses Themenfeld bieten logische Rätsel.

Vorschläge und Hinweise

- Bei der Betrachtung von sprachlichen Ausdrücken sollten nur solche betrachtet werden, bei denen klar über den Wahrheitswert entschieden werden kann (z. B. „Rot ist eine Farbe“ als Beispiel für eine wahre Aussage, „Der Februar hat 30 Tage“ als Beispiel für eine falsche Aussage und „Weiße Schokolade schmeckt besser als dunkle Schokolade“ als Beispiel für einen Ausdruck, der keine Aussage darstellt, weil die Entscheidung über den Wahrheitswert personenabhängig ist).
- Beispiele für formale Ausdrücke sind: „$5 < 7$“, „3 teilt 19“, „$2 + 8 = 10$“
- Der Einstieg in die Untersuchung von Konjunktion bzw. Disjunktion kann anschaulich am Beispiel eines geschlossenen Wasserkreises, in dem zwei Ventile/Wasserhähne hintereinander bzw. parallel eingebaut sind, oder anhand der Reihen- bzw. Parallelschaltung zweier Schalter in einem einfachen geschlossenen elektrischen Stromkreis erfolgen.
- Das Symbol $\vee$ ist als Abkürzung des lateinischen Worts „vel“ für „oder, oder auch“ entstanden.
- Ein möglicher Anwendungskontext von NOR-Verknüpfungen ist im Bereich der Chip-Herstellung zu finden: Hier wird versucht, mit möglichst wenigen unterschiedlichen Bauteilen auszukommen und beispielsweise mithilfe von mehreren NOR-Schaltungen andere Schaltungen zu ersetzen.
- Neben den in diesem Lehrplan verwendeten Bezeichnern und Symbolen existieren noch zahlreiche weitere Bezeichner und Symbole mit gleicher Bedeutung.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen zur Programmierung von Wahrheitstafeln

Fakultative Inhalte

- *Implikation und Äquivalenz*
- *Tautologien*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Terme, Gleichungen und Ungleichungen
- Klassenstufe 10: Mehrstufige Zufallsexperimente

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Elektrische Schaltungen in der Physik
- Elektrische und pneumatische Schaltungen im Bereich Technik
- Elektronik
- Informatik: Klassenstufe 9
- Recherche von Berufen bzw. Berufsfeldern und Berufsbiografien, in denen Aussagenlogik eine Rolle spielt z. B. in den Bereichen Elektronik und Informatik

8. Vertiefung der regulären Themenfelder *(nur Informatik-Zweig)*	Mathematik 8

Aufbauend auf den in Klassenstufe 8 behandelten Themenfeldern werden im Informatikzweig einzelne Fragestellungen dazu vertieft. Diese Vertiefungen können entweder bei der Behandlung des jeweiligen Themenfelds im laufenden Schuljahr thematisiert werden oder getrennt davon als letztes Themenfeld am Ende des Schuljahres.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Kongruenz und Dreieckskonstruktionen	
	Die Schülerinnen und Schüler
• Mittendreieck	• konstruieren zu vorgegebenen Dreiecken das jeweilige Mittendreieck (auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen möglich), • untersuchen die Eigenschaften des Mittendreiecks, • begründen Eigenschaften des Mittendreiecks,
• Satz: Der Umfang eines Vierecks ist stets größer als die Summe der beiden Diagonalenlängen.	• begründen den Satz zum Umfang eines Vierecks mithilfe der Dreiecksungleichung.
Terme	
	Die Schülerinnen und Schüler

• Terme
  ○ in Kontexten
  ○ als Formeln
	• stellen Terme zu Kontexten auf, z. B. zu Tarifen oder Zinsterme,
	• nennen Beispiele für deskriptive bzw. normative Formeln,

• Beweise verschiedener Sätze mit Hilfe von Termen, z. B.
  ○ Die Summe von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist durch 3 teilbar.
  ○ Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.
  ○ Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
  ○ Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl.
  ○ Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist um 1 größer als das doppelte Produkt dieser Zahlen.
  ○ Vertauscht man bei einer beliebigen zweistelligen Zahl a die Ziffern, so erhält man eine Zahl b. Die Summe von a und b ist durch 11 teilbar
	• beweisen mindestens drei der nebenstehenden Sätze mithilfe von Termumformungen,
	• untersuchen, ob es vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen gibt, deren Summe durch 4 teilbar ist.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler
• Mittelwerte: ○ arithmetisch: $\frac{a+b}{2}$ ○ harmonisch: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ bzw. $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$	• bestimmen Mittelwerte in jeweils passenden Kontexten, z. B. mittlere Geschwindigkeit über zwei gleich lange Zeitabschnitte oder über zwei gleichlange Wege.

Vielecke und Prismen

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler
• Parkettierung	• erläutern den Begriff Parkettierung, • identifizieren Parkettierungen im Alltag, • ermitteln verschiedene Parkettierungen von Ebenen mit Vier- und Vielecken sowie weiteren Figuren, • ermitteln regelmäßige Vielecke, mit denen keine Parkettierung einer Ebene möglich ist,
• Länge der Mittenparallele im Trapez als arithmetischer Mittelwert der Längen der beiden Grundseiten • Winkelsumme 180° am Schenkel eines Trapezes • <u>Satz</u>: In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Maße gegenüberliegender Winkel gleich 180°	• begründen geometrisch, dass in einem Trapez die Länge der Mittenparallele der arithmetische Mittelwert der Längen der beiden Grundseiten ist, • begründen, dass bei einem Trapez die Summe der Maße der beiden Innenwinkel an einem Schenkel 180° beträgt, • erkunden den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen im Sehnenviereck und beweisen den Winkelsatz über Sehnenvierecke.

Lineare Funktionen

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler
• Achsenabschnittsform von linearen Funktionen: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	• zeichnen mithilfe von Achsenabschnittspunkten Graphen von linearen Funktionen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler
• Beispiele für nichtlineares Wachstum, z. B. Zinseszins	• grenzen lineares und nichtlineares Wachstum voneinander ab, • untersuchen einen einfachen nichtlinearen Wachstumsprozess (z. B. bei Zinseszins) mithilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters.

Kreis und Zylinder

	Die Schülerinnen und Schüler
• Füllgraphen	• ermitteln experimentell Füllgraphen zu unterschiedlichen Gefäßen, • untersuchen den Zusammenhang zwischen der Form eines Gefäßes und dem zugehörigen Füllgraphen, • ordnen vorgegebene Gefäße und vorgegebene Füllgraphen begründet einander zu.

Basisbegriffe

Achsenabschnittsform, Achsenabschnittspunkte, Füllgraph, Mittelparallele, Mittelwert (arithmetisch, harmonisch), Mittendreieck, Parkettierung, Sehnenviereck

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Beispiele für normative Formeln bieten Tarifsysteme für Gebühren, Strom, Gas, Wasser etc., Beispiele für deskriptive Formeln sind die Volumenformeln für geometrische Körper oder Formeln aus der Physik wie das Ohm'sche Gesetz.
- Im Kontext von normativen Formeln kann am Beispiel von unterschiedlichen Sitzzuteilungsverfahren nach Wahlen untersucht werden, inwiefern bei gleichen Ausgangsdaten verschiedene Zuteilungsverfahren zu unterschiedlichen Sitzverteilungen in Parlamenten führen können (z. B.: D'Hondt-Verfahren vs. Hare/Niemeyer-Verfahren).

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Einsatz eines Funktionenplotters zur Untersuchung der Graphen von linearen und nichtlinearen Funktionen
- Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen im Kontext von Parkettierungen

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Tangentenvierecke*
- *Umfangswinkel-Satz*
- *Darstellung der Lösungsmenge linearer Ungleichungen mithilfe von Graphen linearer Funktionen im Koordinatensystem*
- *Zeichnen von „Funktionenbildern“ mithilfe von dynamischer Geometriesoftware*
- *Lineare Optimierung*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 8: Kongruenz und Dreieckskonstruktionen
- Klassenstufe 8: Terme
- Klassenstufe 8: Vielecke und Prismen
- Klassenstufe 8: Lineare Funktionen
- Klassenstufe 8: Kreis und Zylinder
- Klassenstufe 9: Lineare Gleichungssysteme
- Klassenstufe 9: Quadratwurzeln und reelle Zahlen
- Klassenstufe 9: Satzgruppe des Pythagoras
- Klassenstufe 9: Quadratische Funktionen und Gleichungen
- Klassenstufe 9: Ähnlichkeit

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Parkettierungen in Kunst und Handwerk
- Recherche von Berufen bzw. Berufsfeldern und Berufsbiografien, in denen Parkettierungen in Kunst und Handwerk eine Rolle spielen

Anhang

Grundstock von Operatoren[7]

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

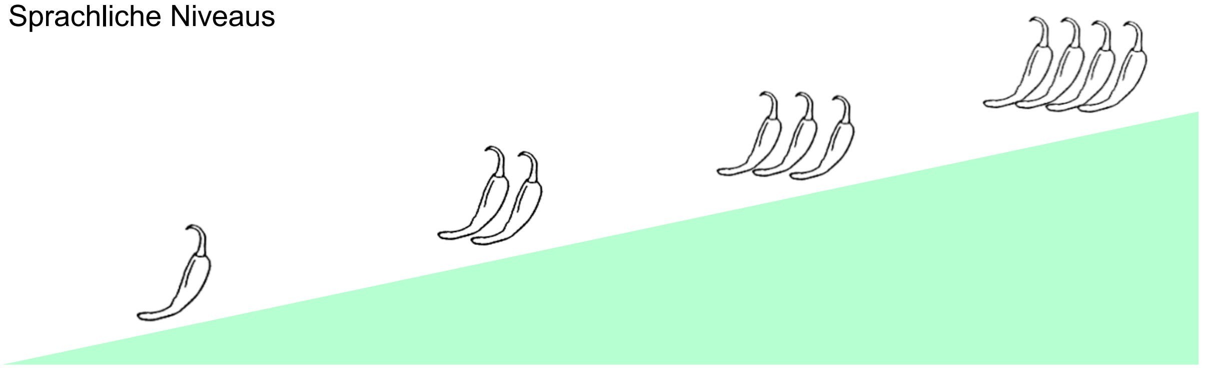
[7] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Grundstock von Operatoren. Berlin. 2019.

Sprachsensibler Fachunterricht: Sprachniveaus

Die Sprachniveaus des sprachsensiblen Fachunterrichts werden durch eine, zwei, drei oder vier Chilischoten symbolisiert. Die Niveaus umfassen die Bereiche Wortschatz, Formenlehre und Satzbau. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Wortschatz und Formen. Sprachliche Herausforderungen können unabhängig voneinander in allen Bereichen liegen.

- Eine Chilischote symbolisiert ein basales sprachliches Niveau. Dieses ist gekennzeichnet durch alltagssprachlichen Wortschatz, Ich- und Du-Formen sowie einfache Satzkonstruktionen (Hauptsätze).
- Zwei Chilischoten zeigen ein leicht fortgeschrittenes sprachliches Niveau an. Dieses umfasst alltagssprachlichen und in Ansätzen auch bildungssprachlichen Wortschatz. Fachsprache wird in wenigen Einzelfällen genutzt. Imperativ-Formen und zusammengesetzte Verben kommen vor. Charakteristisch sind ein Verbalstil sowie einfache Konstruktionen mit Haupt- und Nebensatz.
- Drei Chilischoten stehen für ein deutlich fortgeschrittenes bildungssprachliches Niveau. Der Wortschatz ist teilweise bildungssprachlich. Fachsprache wird in Ansätzen genutzt. Verwendet wird auch die Man-Form. Kennzeichnend sind Formulierungen, die teilweise einen Nominalstil enthalten, sowie komplexere Satzkonstruktionen (z. B. Einschübe, mehrere Nebensätze).
- Vier Chilischoten kennzeichnen eine umfassend entwickelte Bildungssprache. Der Wortschatz ist durchgängig bildungssprachlich mit hohen fachsprachlichen Anteilen. Passiv-Formen werden genutzt. Kennzeichnend sind ein Nominalstil sowie sehr komplexe Satzkonstruktionen (z. B. Schachtelsätze).

Sprachliche Niveaus



Basales Sprachniveau: **Schwerpunkt Alltagssprache**	**Leicht fortgeschrittenes Sprachniveau:** **von der Alltagssprache zur Bildungssprache**	**Fortgeschrittenes bildungssprachliches Niveau:** **Schwerpunkt Bildungssprache**	**Umfassendes bildungssprachliches Niveau:** **Schwerpunkt Bildungssprache**
Wortschatz*			
brauchen / nehmen	benötigen / bereitstellen / hinzufügen		

es gibt / ich sehe, dass	ich vermute, dass / ich denke, dass / es geht um	meine Vermutung ist / ich nehme an, dass / ich bin der Meinung, dass	
der Balken / das Schaubild zeigt … viel / wenig / hoch / tief	der Balken steht für / das Thema des Schaubilds ist mehr / weniger / höher / niedriger am meisten / am wenigsten / am höchsten / am niedrigsten / doppelt so groß / halb so viel	die Werte steigen / auf dem Schaubild sieht man	mit Hilfe des Balkens kann man … erkennen / die Werte stagnieren / es wird dargestellt, dass
Zeit: als Erstes / zuerst / dann / danach / später / zum/am Schluss Grund: weil / also Zweck: damit Art und Weise: dazu / also Gegensatz: aber	Zeit: anschließend / dabei Grund: deswegen / deshalb / darum / denn / da Zweck: so dass / dafür / dazu Art und Weise: dadurch Gegensatz: trotzdem / sondern	Zeit: während / zunächst / zuletzt / schließlich Grund: folglich Zweck: um … zu … Bedingung: wenn …, dann … / falls Gegensatz: obwohl / allerdings	Zeit: bevor / nachdem Art und Weise: indem Gegensatz: jedoch / dennoch / trotz
Formen*			
Ich-Form Du-Form Infinitiv	Imperativ zusammengesetzte Verben	Man-Form	Passiv
Satzbau*			
Hauptsatz	einfache Hauptsatz-Nebensatz-Konstruktionen	komplexe Satzkonstruktionen (z. B. Einschübe, mehrere Nebensätze) Nominalstil	sehr komplexe Satzkonstruktionen (z. B. Schachtelsätze)

*Die aufgeführten Chunks sind nicht ausschließlich, sondern als niveaubeschreibende Beispiele zu verstehen.

Die Darstellung der vier Sprachniveaus ermöglicht Lehrkräften, die sprachlichen Erwartungen für einzelne Lernende oder Gruppen gezielt zu differenzieren. Sie ermöglichen es, einen realistischen Erwartungshorizont zu Sprachrezeption und –produktion der Schülerinnen und Schüler zu entwickeln und können damit zum Beispiel auch für die konkrete Unterrichtsvor- und -nachbereitung bzw. die Erstellung von Leistungsnachweisen genutzt werden. Die Übersichtstabellen erleichtern auch die vorbereitenden Absprachen zwischen Sprachförder- und Fachlehrkräften.