Mathematatik

Lehrplan
Neunjähriges Gymnasium
Klassenstufe 7

2023

Bild: patpitchaya/stock.adobe.com

Ministerium für
Bildung und Kultur
SAARLAND

Inhalt

Vorwort

Schulischer Bildung kommt die Schlüsselaufgabe zu, Kinder und Jugendliche zu befähigen, ihre Persönlichkeit zu entfalten, Fertigkeiten und Kenntnisse zur Teilnahme am gesellschaftlichen Leben zu erwerben und sich in der modernen Gesellschaft zu orientieren. Bildung ist wesentliche Voraussetzung dafür, dass junge Menschen zukünftig ihr Leben und ihre Umwelt selbstbestimmt und in sozialer Verantwortung gestalten und somit an der Bewältigung der gesellschaftlichen, politischen, ökologischen sowie technologischen Herausforderungen der Zukunft mitwirken können.

Schule muss einerseits auf die tiefgreifenden Veränderungsprozesse der digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Transformation reagieren und anderseits genügend Raum für individuelle Lern- und Bildungsprozesse ermöglichen. Vor diesem Hintergrund hat der Landtag des Saarlandes entschieden, die Gymnasien qualitativ weiterzuentwickeln und das neunjährige Gymnasium zum Schuljahr 2023/2024 einzuführen.

Mit einer deutlich erhöhten Gesamtstundenzahl bis zum Abitur sind die Voraussetzungen geschaffen, den digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Herausforderungen im neunjährigen Bildungsgang angemessen zu begegnen und die Gymnasien zukunftsfähig zu gestalten. So gelingt auch eine moderne zeitliche Rhythmisierung des Schulalltags, die gleichzeitig mehr persönlichen Freiraum im Alltag zugesteht. Eigenständige Schulprofile mit unterschiedlichen Zweigen ermöglichen eine individuelle Schwerpunktsetzung entsprechend den Interessen und Neigungen der Schülerinnen und Schüler.

Als Grundlage des schulischen Unterrichtens und Lernens liegen modernisierte Lehrpläne vor, in welchen die Querschnittsthemen Medienbildung und Digitalität, Bildung für Nachhaltige Entwicklung, Demokratiebildung und Berufsorientierung jahrgangs- und fächerübergreifend eingebunden sind. Alle Lehrpläne folgen konsequent dem Grundsatz der Kompetenzorientierung und berücksichtigen die aktualisierten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die Sekundarstufe I. Im engen Austausch mit Expertinnen und Experten der saarländischen Hochschulen wurden die aktuellen Erkenntnisse der jeweiligen Fachdidaktiken für die Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums berücksichtigt.

Den besonderen Bedarfen der Orientierungsphase wird in einem gemeinsamen Lehrplan für die Klassenstufen 5 und 6 Rechnung getragen. Die Lehrpläne ab Klassenstufe 7 sind in der Regel als Einzeljahrgänge konzipiert. Dennoch haben die Schulen die Möglichkeit, einzelne Fächer epochal auch über Klassenstufen hinweg zu rhythmisieren.

Durch vernetzte Lehrpläne soll fächerübergreifendes, projektorientiertes Lernen ermöglicht werden, um den Unterricht selbstwirksam und anwendungsorientiert gestalten zu können. In der Differenzierung von verbindlichen und fakultativen Inhalten öffnet sich hinreichend Raum für exemplarisches Lernen und vertieftes Arbeiten; durch die integrierten Hinweise und Vorschläge zum fächerübergreifenden Arbeiten wird zum Erwerb von vernetztem Wissen und übergeordneten Kompetenzen motiviert.

Die modernisierten Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums legen so die Grundlage für die Weiterentwicklung der Unterrichts- und Schulkultur im neunjährigen Bildungsgang.

Zum Umgang mit dem Lehrplan

Der Mathematikunterricht fördert maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen durch das Vermitteln von Methodenkompetenz, Sachwissen und inneren Haltungen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind somit wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachlichen Grundlagen für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist aber auch ein eigenständiger intellektueller Wert und stellt einen wichtigen Beitrag der Mathematik zu unserer Kultur dar. Sie ermöglicht eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leitet zu verantwortungsbewusstem Handeln an. In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen.

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation **methodischer Vorgehensweisen** voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.
- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.
- Im Unterricht kann der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und Medien den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

Kompetenzerwartungen

Der fachspezifische Anspruch der Bildungsstandards[1] im Fach Mathematik wird durch das nachstehende **Kompetenzschema** abgebildet, auf das sich der Lehrplan bezieht.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen)	**Prozessbezogene mathematische Kompetenzen (allg. math. Kompetenzen)**	**Anforderungsbereiche**
Zahl und Operation	Mathematisch argumentieren	A I Reproduzieren
Größen und Messen	Mathematisch kommunizieren	A II Zusammenhänge herstellen
Strukturen und funktionaler Zusammenhang	Probleme mathematisch lösen	A III Verallgemeinern und Reflektieren
Raum und Form	Mathematisch modellieren	
Daten und Zufall	Mathematisch darstellen	
	Mit mathematischen Objekten umgehen	
	Mit Medien mathematisch arbeiten	

Die in diesem Schema genannten sieben **prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen** erfassen ein weites Spektrum mathematischen Arbeitens. Sie lassen sich dabei nicht scharf voneinander abgrenzen, da beim mathematischen Arbeiten oftmals mehrere Kompetenzen zugleich angesprochen werden.

Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben. Die **inhaltsbezogenen Kompetenzen** werden Leitideen zugeordnet und können damit zur Vernetzung der traditionellen Stoffgebiete beitragen. Im Sinne eines spiralförmigen Vernetzens wechseln sich die Leitideen in der Abfolge aufbauend und wiederholend ab.

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Themenfeldern verzichtet.

[1] KMK: Bildungsstandards für das Fach Mathematik - Erster Schulabschluss (ESA) und Mittleren Schulabschluss (MSA), Berlin. 2022.

Der **Anforderungsbereich I (Reproduzieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit geringerem Komplexitätsgrad wie

- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit mittlerem Komplexitätsgrad wie

- das selbstständige Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,
- das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Der **Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit höherem Komplexitätsgrad wie

- das planmäßige und kreative Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- das bewusste und selbstständige Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung neuer Problemstellungen.

Der Aufbau des Lehrplans

Die jahrgangsbezogenen Teile des Lehrplans sind nach Themenfeldern gegliedert, denen jeweils erläuternde Einleitungstexte vorangestellt sind.

Daran anschließend sind in zwei Spalten die verbindlichen inhaltsbezogenen Kompetenzen und die verbindlichen prozessbezogenen Kompetenzen aufgeführt. Diese knüpfen an die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards an. Die bei der Formulierung der prozessbezogenen Kompetenzen verwendeten Operatoren sind gemäß den Erläuterungen im Anhang umzusetzen. Fakultative Inhalte sind lilafarben und kursiv gedruckt.

Der Lehrplan beschränkt sich im Wesentlichen auf Themenfelder und Lerninhalte, die auch Bezugspunkte für schulische und schulübergreifende Leistungsüberprüfungen sind.

Der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und die Nutzung moderner Kommunikations- und Informationsmedien sind an vielen Stellen des Lehrplans ausdrücklich erwähnt. Darüberhinausgehend sollten digitale Mathematikwerkzeuge – soweit fachdidaktisch naheliegend – durchgängiger Bestandteil des Unterrichts sein. Hinweise im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge gibt auch das Basiscurriculum "Medienbildung und informatische Bildung"[2].

Als Richtwerte für die Gewichtung der verbindlich zu behandelnden Themenfelder bei der Planung des Unterrichts sind Prozentwerte angegeben. Darüber hinaus lässt der Lehrplan Zeit für Vertiefungen, individuelle Schwerpunktsetzungen, fächerübergreifende Bezüge und die Behandlung aktueller Themen.

Die Reihenfolge der Themenfelder ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Sie nimmt die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.

Jedes Themenfeld im Lehrplan schließt mit Vorschlägen und Hinweisen ab. Die Hinweise sind inhaltlich gegliedert nach den Gesichtspunkten:

- Basisbegriffe
- Vorschläge und Hinweise zu
  - methodischen und fachdidaktischen Erläuterungen,
  - digitalen Mathematikwerkzeugen
  - fakultativen Inhalten,
  - thematischen Querverbindungen im Lehrplan,
  - fächerverbindenden und fachübergreifenden Aspekten.

[2] Basiscurriculum „Medienbildung und informatische Bildung“, Klassenstufen 1 bis 10, August 2019

Symbole in Verbindung mit Mengen

Menge der

- natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$
- reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

Weitere Symbole[3]:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$

$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$

$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \;\vee\; x \in B\}$

$A \backslash B = \{x \,|\, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$

[3] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Dokument mit mathematischen Formeln. Berlin. 2021. Download: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/ (Stand: 28.04.2023)

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufe 7

Der Unterricht der Klassenstufe 7 führt sowohl das mathematische Erkunden der Alltagswelt als auch das innermathematische Strukturieren aus den vorangehenden Klassenstufen weiter.

Aufbauend auf der Einführung der negativen Zahlen in den vorangegangenen Klassenstufen besteht die wesentliche Neuerung darin, dass negative Zahlen nun auch als zweites Rechenglied auftauchen. Die Rechenregeln in den neuen Zahlbereichen genügen der Forderung, dass die bereits behandelten Rechengesetze und Verfahren erhalten bleiben (Permanenzprinzip). Neu hinzu kommen die Gesetze zur Gegenzahl. Die bis dahin für sich betrachteten ganzen Zahlen sowie die positiven Bruchzahlen werden, ergänzt um die negativen Bruchzahlen, in der Menge der rationalen Zahlen zusammengefasst. Diese Zahlenbereichserweiterung findet ihre Fortführung in Klassenstufe 9 mit der Einführung der reellen Zahlen.

Das Wissen um Zahlenterme erweiternd begegnen den Schülerinnen und Schülern nun auch Terme mit Variablen, die der Beschreibung von geometrischen Situationen und Sachkontexten dienen und mit denen in vielfältiger Weise operiert wird. Gleichungen stellen ein wichtiges Hilfsmittel zur Bearbeitung inner- und außermathematischer Probleme dar.

Zuordnungen sind im Alltag auf vielfältige Weise vertreten und bereiten den Funktionsgedanken vor, der von Klassenstufe 8 an von besonderer Bedeutung ist. Bürgerliches Rechnen und der Einstieg in die Stochastik erweitern die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler, anwendungsbezogene und alltagsrelevante Problemstellungen mathematisch zu bearbeiten.

Nach der Behandlung von Achsen- und Drehsymmetrie im Unterricht der Klassenstufen 5 bzw. 6 stehen nun weitere geometrische Untersuchungen im Vordergrund. Das sorgfältige Abwägen zwischen Exaktheit und Verständnis beim Beschreiben, Erkennen und Begründen von Sachverhalten sowie beim Konstruieren von Figuren ist dabei unabdingbar. Das Dreieck als einfache ebene Figur sollte dabei immer wieder als Teilfigur komplexer Gebilde betrachtet werden. Digitale Mathematikwerkzeuge bieten erweiterte Perspektiven und stellen eine sinnvolle Ergänzung des händischen Arbeitens dar, das aber dennoch im Fokus stehen sollte. Die Möglichkeit zu dynamisieren, regt zum experimentellen Erkunden an. Dieses induktive Vorgehen erfordert eine logische Bestätigung.

In Klassenstufe 7 wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner[4]: verpflichtend eingeführt. Dessen Einsatz kann auf die Themenfelder „Zuordnungen“ und „Prozentrechnung“ beschränkt werden. Dabei ist auf einen verständigen Einsatz zu achten, um die bis dahin erworbenen Rechenfertigkeiten ohne Hilfsmittel wachzuhalten und zu festigen.

[4] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Hinweise zur Verwendung von Hilfsmitteln (gültig ab Prüfungsjahr 2030). Berlin. 2023.
Download: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/ (Stand: 28.04.2023)

Themenfelder

Themenfelder Klassenstufe 7	Mathematik
1. Rationale Zahlen	20%
2. Terme, Gleichungen und Ungleichungen	15%
3. Zuordnungen	15%
4. Geometrische Konstruktionen	10%
5. Prozentrechnung	15%
6. Einführung in die Stochastik	10%
7. Winkel in Figuren	15%

Die Einführung der Menge der rationalen Zahlen wird durch Betrachtungen an der Zahlengeraden vorbereitet, an der erstmals auch negative Bruchzahlen verortet werden. Das bisher als Rechen- bzw. Vorzeichen bekannte Minuszeichen wird nun auch als Zeichen für die Gegenzahl verwendet.

Nachdem das Rechnen mit ganzen Zahlen in den vorangegangenen Klassenstufen eng mit Sachzusammenhängen verknüpft war und als zweites Rechenglied zunächst nur natürliche Zahlen auftraten, erfolgt nun eine Erweiterung auf negative ganze sowie Bruchzahlen. Auf der Menge der rationalen Zahlen ist nun auch die Subtraktion uneingeschränkt möglich.

Der Veranschaulichung des Addierens und Subtrahierens als gerichtete Bewegung entlang der Zahlengeraden wird weiterhin Rechnung getragen. Ergänzend kommt dem Permanenzprinzip bei der Herleitung von Rechenregeln eine zentrale Rolle zu. Dabei tauchen neben Rechen- nun auch Zahlklammern auf.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Zahl, Gegenzahl und Betrag • Zahlengerade (Wiederholung) • Bedeutung des Minuszeichens (Wiederholung) • Gegenzahl einer Zahl a ○ Gegenzahlzeichen, Symbol $-a$ ○ Gegenzahl der Gegenzahl $-(-a) = a$ • <u>Definition</u>: Der Abstand des Zahlpunkts einer Zahl a vom Nullpunkt heißt Betrag von a. ○ Symbol $\lvert a \rvert$ ○ $\lvert a\rvert = \begin{cases} a & \text{, falls } a \text{ positiv} \\ 0 & \text{, falls } a = 0 \\ -a & \text{, falls } a \text{ negativ} \end{cases}$	Die Schülerinnen und Schüler • lesen Zahlen an der Zahlengerade ab und zeichnen Zahlpunkte ein, • beschreiben die Lage der Zahlpunkte von Zahl und Gegenzahl auf der Zahlengeraden, • geben Gegenzahlen an, • erläutern die Bedeutung von Identitäten wie z. B. $-(+5) = -5$ und $-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, • erklären, warum $-a$ eine positive Zahl, eine negative Zahl oder die Zahl 0 darstellen kann, • bestimmen Beträge von Zahlen, • erläutern, dass Zahl und Gegenzahl den gleichen Betrag haben.
Menge der rationalen Zahlen • Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen • Einbettung der Menge $\mathbb{Z}$	Die Schülerinnen und Schüler • ordnen Zahlen den Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ zu, • stellen die Mengen $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ bzw. exemplarische Teilmengen in Venn-Diagrammen dar.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Addieren und Subtrahieren (Teil 2)
• Addition einer positiven Zahl als Bewegung auf der Zahlengeraden nach rechts (Wiederholung)
• Subtraktion einer positiven Zahl als Bewegung auf der Zahlengeraden nach links (Wiederholung)
• Addition einer negativen Zahl
    ○ als Subtraktion der Gegenzahl
    ○ als Bewegung auf der Zahlengeraden nach links
• Subtraktion einer negativen Zahl
    ○ als Addition der Gegenzahl
    ○ als Bewegung auf der Zahlengeraden nach rechts
• keine Einschränkungen beim Subtrahieren in der Menge der rationalen Zahlen
	Die Schülerinnen und Schüler
	• leiten ausgehend von Permanenzreihen her, dass die Addition einer negativen Zahl der Subtraktion der Gegenzahl entspricht,
	• leiten ausgehend von Permanenzreihen her, dass die Subtraktion einer negativen Zahl der Addition der Gegenzahl entspricht,
	• veranschaulichen mithilfe des Pfeilmodells die Addition und die Subtraktion rationaler Zahlen an der Zahlengerade,
	• berechnen Werte von Summen und Differenzen rationaler Zahlen,
	• geben das Vorzeichen des Werts einer Summe bzw. einer Differenz an, ohne ihren Wert zu berechnen,
	• benennen in Termen die unterschiedlichen Plus- und Minuszeichen als Vor-, Rechen- bzw. Gegenzahlzeichen,
	• vereinfachen in Termen Vor-, Rechen- und Gegenzahlzeichen soweit wie möglich,
	• bestimmen den Abstand zweier Zahlpunkte auf der Zahlengeraden mithilfe des Betrags der Differenz,
	• begründen, dass es bei der Subtraktion in der Menge der rationalen Zahlen keine Einschränkungen gibt.

Eigenschaften der Addition • Kommutativität (K^+) • Assoziativität (A^+) • Neutrales Element (N^+) • Gegenzahl als inverses Element (I^+): Zu jeder Zahl a gibt es eine Gegenzahl $-a$ mit $a + (-a) = 0$ • Gegenzahl einer Summe: $-(a + b) = (-a) + (-b)$	Die Schülerinnen und Schüler • bestätigen die Kommutativität und die Assoziativität der Addition an Zahlenbeispielen. • benennen in Termen die unterschiedlichen Klammern als Rechen- bzw. Zahlklammern, • formulieren die Regel für die Gegenzahl einer Summe verbal.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Multiplizieren und Dividieren (Teil 2) • Multiplikation ○ einer ganzen Zahl mit einer natürlichen Zahl (Wiederholung) ○ zweier ganzer Zahlen ○ zweier rationaler Zahlen • Multiplikationsregel: Das Produkt zweier rationaler Zahlen mit gleichem (verschiedenem) Vorzeichen ist positiv (negativ). Sein Betrag ist das Produkt der Beträge der beiden Faktoren. • Potenzen mit negativen Basen und natürlichen Exponenten • Division ○ einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl ($\neq 0$) (Wiederholung) ○ als Umkehroperation der Multiplikation ○ zweier rationaler Zahlen • Divisionsregel: Der Quotient zweier rationaler Zahlen mit gleichem (verschiedenem) Vorzeichen ist positiv (negativ). Sein Betrag ist der Quotient der Beträge von Dividend und Divisor. • Kehrzahl einer Zahl a ○ Symbol $\frac{1}{a}$ ○ Division als Multiplikation mit der Kehrzahl	Die Schülerinnen und Schüler • leiten ausgehend von Permanenzreihen die Regel für die Multiplikation zweier rationaler Zahlen her, • veranschaulichen mithilfe des Pfeilmodells die Multiplikation rationaler Zahlen, • berechnen Werte von Produkten rationaler Zahlen, • geben an, dass Multiplikation einer rationalen Zahl mit -1 die Gegenzahl ergibt, • geben das Vorzeichen des Werts eines Mehrfachprodukts an, ohne dessen Wert zu berechnen, • berechnen Werte von Potenzen, • leiten durch Operationsumkehr die Regel für die Division zweier rationaler Zahlen her, • berechnen Werte von Quotienten rationaler Zahlen, • erläutern exemplarisch, dass ein Bruch mit negativem Zähler und positivem Nenner (bzw. umgekehrt) eine negative Zahl repräsentiert, z. B. $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ • geben die Kehrzahl einer rationalen Zahl an, • unterscheiden die Begriffe Kehrzahl und Gegenzahl.
Eigenschaften der Multiplikation • Kommutativität ($K^\bullet$) • Assoziativität ($A^\bullet$) • Neutrales Element ($N^\bullet$)	Die Schülerinnen und Schüler • bestätigen die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation an Zahlenbeispielen

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Kehrzahl als inverses Element ($I^\bullet$): Zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es eine Kehrzahl $\frac{1}{a}$ mit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ • <u>Nullproduktsatz</u>: Wenn (mindestens) ein Faktor eines Produktes den Wert 0 hat, dann hat auch das Produkt den Wert 0 (und umgekehrt).	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Werte von Zahlentermen, in denen 0 und 1 als Teilergebnisse auftreten.
Verbinden der Rechenarten • <u>Plusklammerregel</u>: Steht ein Pluszeichen vor einer Klammer, so kann man die Klammer weglassen. $a + (b + c) = a + b + c$ $a + (b - c) = a + b - c$ • <u>Minusklammerregel</u>: Steht ein Minuszeichen vor einer Klammern, so kann man die Klammer nur weglassen, wenn man in der Klammer das Rechenzeichen „+“ durch „–„ ersetzt und umgekehrt. $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$ • Vorrangregeln • Distributivität	Die Schülerinnen und Schüler • begründen die Plusklammerregel mithilfe des Assoziativgesetzes, • begründen die Minusklammerregel mithilfe der Regel für die Gegenzahl einer Summe, • berechnen Werte von Termen mit Plus- bzw. Minusklammern (auch mithilfe digitaler Rechentrainer möglich), • berechnen Werte von Termen unter Einhaltung der Vorrangregeln, • wenden das Distributivgesetz zum Ausmultiplizieren mit bzw. zum Ausklammern von negativen Faktoren an, • verschaffen sich Rechenvorteile, • lösen Sachaufgaben (auch im Kontext BNE möglich).

Basisbegriffe

Betrag, Gegenzahl(-zeichen), inverses Element, Kehrzahl, Klammer (Minus-, Plus-, Rechen-, Zahl-), rational

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Besonderes Augenmerk sollte auf die Erläuterung der Art vorkommender Minuszeichen gelegt werden; insbesondere liegt beim Term $-a$ stets ein Gegenzahlzeichen vor.

Vorschläge und Hinweise

- Das Pfeilmodell zur Veranschaulichung der Addition bzw. der Subtraktion an der Zahlengeraden ist aus den Klassenstufen 5/6 bekannt und kann hier erweitert werden. Das Pfeilmodell dient daneben – losgelöst von der Zahlengeraden – zur Veranschaulichung der Multiplikation rationaler Zahlen, indem Pfeile verlängert bzw. verkürzt sowie umgekehrt werden.
- mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Recherche zu steigenden Temperaturen in der Arktis bzw. in der Antarktis infolge der Klimaerwärmung und Bestimmen von Temperaturänderungen innerhalb vorgegebener Zeiträume.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitale Rechentrainer

Fakultative Inhalte

- *Vereinbarkeit der Multiplikationsregel für Produkte mit mindestens einem negativen Faktor mit dem Distributivgesetz (Permanenz)*
- *Vereinbarkeit der Regeln für Multiplikation und Gegenzahlbildung mit dem Distributivgesetz (Permanenz)*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit Brüchen
- Klassenstufen 5/6: Ganze Zahlen
- Klassenstufe 7: Terme, Gleichungen und Ungleichungen
- Klassenstufe 9: Quadratwurzeln und reelle Zahlen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- historische Betrachtung zu der Einführung der Zahlbereiche

2. Terme, Gleichungen und Ungleichungen — Mathematik 7

In diesem Themenfeld müssen eine Reihe von Grundvorstellungen aufgebaut werden: Das Gleichheitszeichen dient nicht mehr nur als Zuweisungszeichen (d. h. als Operationszeichen), sondern auch als Vergleichszeichen (d. h. als Relationszeichen). Terme werden nicht mehr nur als „Bauplan“, sondern zusätzlich auch als „Rechenschema“ interpretiert. Termumformungen erleichtern Berechnungen von Werten eines Terms. Die Gleichheit von Termen bedeutet in dieser Sichtweise eine Wertgleichheit.

Bereits in den vergangenen beiden Schuljahren wurden Variablen vereinzelt als Platzhalter für unbekannte Zahlen innerhalb von Termen verwendet. Diese Grundvorstellung gilt es weiter auszubauen. Der Einstieg in den Umgang mit Gleichungen erfolgt über Problemlöseaufgaben, die zunächst nur durch systematisches Probieren mithilfe von Tabellen oder einer informativen Figur gelöst werden können. Durch das Aufstellen von Gleichungen erhalten die Schülerinnen und Schüler Zugang zu einem weiteren heuristischen Hilfsmittel, mit dem Probleme kurz und prägnant beschrieben und zudem gelöst werden können.

Auch die Gleichungen werden zunächst durch systematisches Probieren gelöst, um anschließend mithilfe des Waagemodells Strategien zum systematischen Lösen von Gleichungen zu entwickeln, die formal durch Äquivalenzumformungen beschrieben werden. Das Lösen von Ungleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen stellt ein weiteres Hilfsmittel dar.

Die Interpretation von Aufgabentexten und das Entwickeln der passenden mathematischen Modelle sind ebenso Gegenstand der Betrachtungen wie der Kalkül. Die Komplexität der Rechenaufgaben sollte auf ein angemessenes Maß beschränkt bleiben.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Terme	

• Terme mit Variablen
  ○ Wert eines Terms
  ○ Termumformung
  ○ Gleichwertigkeit von Termen, Symbol =
	Die Schülerinnen und Schüler
	• berechnen den Wert eines Terms mit Variablen durch Einsetzen,
	• bestimmen die Art eines Terms durch Gliederung,
	• übersetzen Verbalformulierungen in Terme,
	• vereinfachen Terme,
	• stellen Terme zu Sachkontexten und geometrischen Kontexten auf.

Aussagen und Aussageformen	

• Definition: Eine Aussage ist eine sprachliche Formulierung, die einen Wahrheitswert (wahr bzw. falsch) besitzt.
• Aussageformen mit einer Variablen
  ○ Grundmenge G
  ○ Lösung und Lösungsmenge L
  ○ Begriffe: allgemeingültig, unerfüllbar
	Die Schülerinnen und Schüler
	• geben an, ob eine vorgegebene Formulierung eine Aussage darstellt,
	• geben den Wahrheitswert von Aussagen (z. B. zur Teilbarkeit) an,
	• unterscheiden Term, Aussage und Aussageform.

2. Terme, Gleichungen und Ungleichungen — Mathematik 7

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen Lösungen und Lösungsmengen zu Aussageformen durch systematisches Probieren, • erläutern exemplarisch, dass die Lösungsmenge einer Aussageform von der Grundmenge abhängt.

Gleichungen
• Gleichungen mit einer Variablen der Form
  ○ $a \cdot x + b = c$
  ○ $a \cdot x + b = c \cdot x + d$
  ○ $a \cdot (x + b) = c \cdot (x + d)$
• Äquivalenz von Gleichungen
• Äquivalenzumformung als mathematische Operation, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert
  ○ Äquivalenzpfeil: ⇔
• Äquivalenzumformungen:
  ○ Termumformungen
  ○ beidseitige Addition oder Subtraktion eines Terms
  ○ beidseitige Multiplikation mit einer Zahl oder Division durch eine Zahl ungleich 0
	Die Schülerinnen und Schüler
	• bestimmen Lösungen von Gleichungen durch systematisches Probieren,
	• bestimmen Lösungsmengen von Gleichungen mithilfe eines Waagemodells,
	• bestimmen Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen,
	• begründen, warum die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit 0 keine Äquivalenzumformung ist,
	• überprüfen eine Lösung mittels Probe,
	• stellen Gleichungen zu Sachkontexten, Zahlen- und Altersrätseln auf und lösen diese,
	• interpretieren die Lösungen von Gleichungen in Sachkontexten (auch im Kontext BNE möglich),
	• formulieren Zahlen- und Altersrätsel zu vorgegebenen Gleichungen.

Ungleichungen
• Ungleichungen mit einer Variablen mit den Relationszeichen $<, \leq, >, \geq$
• Äquivalenzumformungen:
  ○ Termumformungen
  ○ beidseitige Addition oder Subtraktion eines Terms
	Die Schülerinnen und Schüler
	• untersuchen die Auswirkungen von Äquivalenzumformungen auf das Relationszeichen an der Zahlengerade,
	• bestimmen Lösungsmengen von Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
○ beidseitige Multiplikation mit einer positiven Zahl oder Division durch eine positive Zahl ○ beidseitige Multiplikation mit einer negativen Zahl oder Division durch eine negative Zahl und gleichzeitiges Umkehren des Relationszeichens	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Lösungsmengen an der Zahlengerade dar, • überprüfen Lösungsmengen durch Stichproben.

Basisbegriffe

allgemeingültig, äquivalent, Äquivalenzpfeil, Äquivalenzumformung, Aussage, Aussageform, Gleichung, Grundmenge, Lösungsmenge, Relationszeichen, unerfüllbar, Ungleichung

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- „Zahlentricks" zum Erraten einer gedachten Zahl machen deutlich, dass man auch mit unbekannten Zahlen rechnen kann. „Zahlentricks" der Form „Denke dir eine Zahl, addiere 5, multipliziere mit 2 und subtrahiere 10" eignen sich zudem, um Terme aufzustellen und deren Gleichwertigkeit zu zeigen.
- Beim Vereinfachen von Termen mit Variablen sollten Formen betrachtet werden wie beispielsweise: $3x + 2 + 5x - 7,\ 2a + 3b - a,\ 4 \cdot (5 + 2y) + y,\ 6k - (k - 8)$
- Beispiele für Aussageformen sind: $2 \cdot (a + 3) = 0,\ a\,|12,\ a^2 < 4$
- Zunächst sollten Gleichungen durch systematisches Probieren mittels Tabellen gelöst werden. Dabei können auch nichtlineare Gleichungen wie z. B. $x^2 + 3x = 0$ betrachtet werden. Solche Gleichungen zeigen darüber hinaus, dass es auch Gleichungen mit mehreren Lösungen gibt.
- Bei der Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen empfiehlt sich der Einsatz einer Balken- oder Tafelwaage. Deren eingeschränkter Nutzen kann auch gewinnbringend mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.
- Beim Lösen von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen sollten zunächst Gleichungen der Form $a \cdot x + b = c$ bzw. $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ behandelt werden, bevor die Gleichungen auch Klammern enthalten.
- Mengensymbole schreibt man nur dann mit Doppelstrich, wenn es sich um fest definierte Mengen wie z. B. die Zahlenmengen handelt.
- Beim Modellieren mittels Gleichungen eignet sich die folgende Strategie: Vereinfachen der Sachsituation z. B. durch eine Skizze, Einführen und Benennen von Variablen, Aufstellen einer Gleichung, Lösen der Gleichung, kritisches Reflektieren der gefundenen Lösung und Formulieren eines Antwortsatzes.
- In Problemstellungen, bei denen eine Größe oder ein Zahlenwert unverändert bleibt (z. B. der Altersunterschied zwischen Personen in Altersrätseln), können Gleichungen unter Verwendung des Invarianzprinzips aufgestellt und anschließend gelöst werden.
- mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Problemstellungen im Kontext von Strom-, Gas- und Wassertarifen.

Vorschläge und Hinweise

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitales Waagemodell

Fakultative Inhalte

- *einfache Betragsgleichungen und Betragsungleichungen*
- *Lösungsalgorithmus als Flussdiagramm*
- *Lösen von linearen Gleichungen mit Parametern*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Zuordnungen, Prozentrechnung
- Klassenstufe 8: Terme, lineare Funktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Zusammenhang zwischen Dichte, Volumen und Masse
- geradlinig gleichförmige Bewegungen

In diesem Themenfeld wird der bislang eher propädeutisch erfahrene Zuordnungsbegriff zwischen Größen bzw. Zahlen explizit thematisiert. Ausgehend von Situationen des Alltags werden verschiedene Formen der Darstellung von Zuordnungen betrachtet und die Zuordnungsvorstellung von Funktionen vorbereitet.

Anhand von proportionalen und umgekehrt proportionalen Zuordnungen findet bei der Untersuchung der Frage „Wie ändert sich eine Größe, wenn eine andere Größe variiert wird?“ erstmals ein bewusster Kontakt der Schülerinnen und Schüler mit der Kovariationsvorstellung statt. Der Blick auf die entsprechenden Graphen eröffnet den Zugang zur Objektvorstellung.

Proportionalität und umgekehrte Proportionalität sind Grundvorstellungen, die viele Schülerinnen und Schüler im Alltag entwickelt haben. Der Unterricht soll hier präzisieren und für mathematische Klarheit, Ordnung sowie Kontrastierung sorgen.

Der Aufbau des Zuordnungsaspekts findet seine Fortführung in der Klassenstufe 8 im Themenfeld „Lineare Funktionen“.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Zuordnungen zwischen Größen	
• Darstellung von Zuordnungen mit Hilfe von ○ Texten ○ Tabellen ○ Graphen ○ Termen • Begriffe: ○ Ausgangswert/-größe und Ausgangsmenge ○ Zielwert/-größe und Zielmenge ○ Zuordnungsvorschrift • Symbole $\rightarrow$ und $\mapsto$	Die Schülerinnen und Schüler • geben Beispiele für Zuordnungen aus dem täglichen Leben an, z. B. Temperaturkurven, Wasserpegel, Briefporto, Taxikosten, Füllgraphen, • beschreiben Zuordnungen verbal, • erstellen Wertetabellen zu Zuordnungen, • skizzieren Graphen von Zuordnungen, • geben in einfachen Fällen zu Zuordnungen Zuordnungsvorschriften an, • entscheiden in einfachen Fällen begründet, ob der Graph einer Zuordnung aus einer durchgezogenen Linie oder aus einzelnen Punkten besteht.
Proportionale Zuordnungen	
• „Je mehr – desto mehr“ - Formulierungen • Definition: Wenn dem k-fachen Ausgangswert stets der k-fache Zielwert zugeordnet wird, dann heißt eine Zuordnung proportional (Vielfacheneigenschaft).	Die Schülerinnen und Schüler • geben an, ob eine Zuordnung zur Kategorie „Je mehr-desto mehr“ gehört, • nennen Beispiele und Gegenbeispiele für proportionale Zuordnungen aus dem Alltag.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Eigenschaften: ○ Quotientengleichheit - konstanter Quotient als Proportionalitätsfaktor ○ Additivität ○ Die Punkte des Graphen liegen auf einer Ursprungsgeraden. • Zweisatz-Verfahren • Dreisatz-Verfahren	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden begründet, ob eine Zuordnung aus der Kategorie „Je mehr-desto mehr“ auch proportional ist, • erstellen Wertetabellen zu proportionalen Zuordnungen bzw. bestimmen mithilfe der Eigenschaften fehlende Werte, • prüfen Wertetabellen hinsichtlich der Eigenschaften und entscheiden damit jeweils, ob die entsprechende Zuordnung proportional sein kann, • erläutern, warum proportionale Zuordnungen durch Gleichungen der Form $y = m \cdot x$ charakterisierbar sind, • begründen, warum eine Gleichung der Form $y = m \cdot x$ die Quotientengleichheit widerspiegelt, • zeichnen Graphen proportionaler Zuordnungen, • ermitteln Zuordnungsvorschriften zu proportionalen Zuordnungen, • bestimmen in Sachkontexten gesuchte Größen mithilfe des Zweisatzverfahrens, • bestimmen in Sachkontexten gesuchte Größen mithilfe des Dreisatzverfahrens (auch unter Verwendung des ggT, auch im Kontext BNE möglich), • untersuchen an Gegenständen den Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang von Kreisen und bestimmen näherungsweise den Proportionalitätsfaktor.
Umgekehrt proportionale Zuordnungen • „Je mehr – desto weniger“ - Formulierungen • Definition: Wenn dem k-fachen Ausgangswert stets der $\frac{1}{k}$ -fache Zielwert zugeordnet wird, dann heißt eine Zuordnung umgekehrt proportional.	Die Schülerinnen und Schüler • geben an, ob eine Zuordnung zur Kategorie „Je mehr-desto weniger“ gehört, • nennen Beispiele und Gegenbeispiele für umgekehrt proportionale Zuordnungen aus dem Alltag.

3. Zuordnungen — Mathematik 7

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• Eigenschaften:
  ○ Produktgleichheit
  ○ Die Punkte des Graphen liegen auf einer Hyperbel.
• Zweisatz-Verfahren
• Dreisatz-Verfahren
	Die Schülerinnen und Schüler
	• entscheiden begründet, ob eine Zuordnung aus der Kategorie „Je mehr-desto weniger“ auch umkehrt proportional ist,
	• erstellen Wertetabellen zu umgekehrt proportionalen Zuordnungen bzw. bestimmen mithilfe der Produktgleichheit fehlende Werte,
	• prüfen Wertetabellen auf Produktgleichheit und entscheiden damit, ob die entsprechende Zuordnung umgekehrt proportional sein kann,
	• erläutern, warum umgekehrt proportionale Zuordnungen durch Gleichungen der Form $y = \frac{a}{x}$ charakterisierbar sind,
	• begründen, warum eine Gleichung der Form $y = \frac{a}{x}$ die Produktgleichheit widerspiegelt,
	• zeichnen Graphen umgekehrt proportionaler Zuordnungen,
	• ermitteln Zuordnungsvorschriften zu umgekehrt proportionalen Zuordnungen,
	• bestimmen in Sachkontexten gesuchte Größen mithilfe des Zweisatzverfahrens,
	• bestimmen in Sachkontexten gesuchte Größen mithilfe des Dreisatzverfahrens (auch unter Verwendung des ggT, auch im Kontext BNE möglich),
	• untersuchen den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen von Rechtecken bei gegebenem Flächeninhalt (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge möglich).

Basisbegriffe

Additivität, Dreisatzverfahren, Graph, Hyperbel, Menge (Ausgangs-, Definitions-, Ziel-), Produktgleichheit, proportional (umgekehrt), Quotientengleichheit, Ursprungsgerade, Vielfacheneigenschaft, Wert (Ausgangs-, Ziel-), Wertetabelle, Zuordnung, Zuordnungsvorschrift, Zweisatzverfahren

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Bei der Untersuchung von Zuordnungen kann zwischen den Darstellungen Text, Tabelle, Graph und Term auf unterschiedlichen Wegen gewechselt werden.
- Das Erkunden des Flüssigkeitsstands in unterschiedlich geformten Gefäßen in Abhängigkeit vom Füllvolumen bzw. Zeit bietet einen enaktiven Zugang zum Begriff der Zuordnung.
- Eine Vertiefung findet der enaktive Zugang beim „Gehen von Graphen“. Hierbei bewegt sich eine Person in Abhängigkeit von der Zeit auf einen Stuhl zu oder von ihm weg und das entsprechende Entfernungs-Zeit-Diagramm soll erstellt werden bzw. ein vorgegebenes Diagramm soll in eine Bewegung umgesetzt werden.
- In der Schulbuchliteratur treten auch die Bezeichnungen „direkt proportional“ und „indirekt proportional“ bzw. „antiproportional“ auf.
- Im Sinne einer prototypischen Begriffsbildung sollten nicht proportionale bzw. nicht umgekehrt proportionale Zusammenhänge durchgängig zur Kontrastierung in den Unterricht einbezogen werden (z. B. „Drei Sänger singen ein Lied in vier Minuten. Wie lange brauchen sechs Sänger für dieses Lied?“). In diesem Zusammenhang können zur Abgrenzung auch exponentielle Zusammenhänge angesprochen werden.
- Bei Modellierungen sollte der Fokus auch auf deren Grenzen gelegt werden (z. B. „Eine Person erledigt eine Arbeit in 8 Stunden. Wie lange brauchen 100 Personen?“).
- Experimente und Datenerhebungen zu proportionalen und nicht proportionalen Zusammenhängen fördern das Verständnis.
- Zusammenhänge aus der Geometrie, z. B. von Seitenlänge und Umfang von Quadraten, bieten Gelegenheit zum immanenten Wiederholen. Digitale Mathematikwerkzeuge bieten effizient vernetzende Darstellungen.
- Die Additivität von Proportionalitäten („pro portion“) bereitet das Thema Funktionaleigenschaften von Funktionen vor.
- mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
    - Zahlreiche Fermiaufgaben zu BNE (z. B. tropfender Wasserhahn, Energieverbrauch durch ungenutzte Ladegeräte in Steckdosen, etc.) lassen sich mit Überlegungen zur Proportionalität lösen und dienen auch dem intelligenten Üben des Rechnens mit großen Zahlen.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Planung und Durchführung konkreter Experimente (z. B. Füllexperimente) mit Erstellung einer Ergebnis-Verlaufstabelle und nachfolgender Auswertung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms
- Eigenständige Verwendung digitaler Werkzeuge zur Kommunikation und Kooperation und zum Teilen medialer Produkte und Informationen beim kooperativen Erfassen von Messwerten (z. B. Etherpad oder EtherCalc)
- Auswertung von sportlichen Aktivitäten (Läufe, Wandern, etc.) mithilfe von Smartwatches bzw. Sportuhren und entsprechenden Apps

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Begründung der Eigenschaft der Additivität bei proportionalen Zuordnungen*
- *zusammengesetzter Dreisatz*
- *Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Grundfläche und der Höhe von Quadern bei gegebenem Volumen*
- *Transitivität der Proportionalität*
- *Proportionalität zum Produkt zweier Größen unter Beachtung des Prinzips der Variablenkontrolle*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Natürliche Zahlen (Figurierte Zahlen)
- Themenfeld: Prozentrechnung
- Klassenstufe 8: Lineare Funktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- gleichförmige Bewegung
- Dichte
- Ohm‘sches Gesetz
- Klimadiagrame
- Höhenprofile

Nachdem die Schülerinnen und Schüler im Doppeljahrgang 5/6 mit der Symmetrieachse sowie dem Lot erste besondere Linien kennengelernt haben, wird das Wissen zunächst um Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende erweitert. Hierbei werden im Rahmen enaktiver Faltaufgaben Kenntnisse über die Achsensymmetrie gewinnbringend eingesetzt.

Aufbauend auf dem Wissen um Winkelarten aus Klassenstufe 5/6 lernen die Schülerinnen und Schüler mit spitz-, recht- und stumpfwinkligen weitere besondere Dreiecke sowie weitere besondere Linien kennen. Die Tatsache, dass sich sämtliche besondere Linien in Dreiecken jeweils in gemeinsamen Punkten schneiden, durchzieht dieses sowie weiterführend das Themenfeld Kongruenz und Dreieckskonstruktionen in Klassenstufe 8 wie ein roter Faden. Der Einsatz einer Geometriesoftware ermöglicht den Schülerinnen und Schülern diese Entdeckung nicht nur exemplarisch, sondern in beliebig vielen Fällen. Wiederkehrend ist auch die Erkenntnis, dass der Schnittpunkt der besonderen Linien selbst von besonderer Bedeutung sein kann.

Die Einführung der drei oben genannten Dreiecksarten ermöglicht erste Fallunterscheidungen und liefert damit eine Grundidee, die auch in anderen Teilbereichen der Mathematik benötigt wird.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Mittelsenkrechte
 	
• <u>Definition</u>: Die Gerade m_{AB}, die orthogonal zur Strecke $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft, heißt Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.
• Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$
  ○ als Symmetrieachse der Strecke $\overline{AB}$
  ○ als Menge aller Punkte, die von den Punkten A und B den gleichen Abstand haben
• Grundkonstruktion: Mittelsenkrechte
	Die Schülerinnen und Schüler
	• stellen die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ durch Falten her und untersuchen deren Eigenschaften,
	• begründen, dass ein Punkt auf der Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ den gleichen Abstand von den Punkten A und B hat,
	• begründen, dass alle Punkte, die von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand haben, auf der Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ liegen,
	• erläutern den Unterschied zwischen Zeichnen und Konstruieren,
	• konstruieren die Mittelsenkrechte einer Strecke mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• konstruieren den Mittelpunkt einer Strecke mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• beschreiben Konstruktionen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Lot
• Senkrechte
  ○ in einem Punkt einer Geraden
  ○ zu einer Gerade durch einen Punkt außerhalb der Geraden
• Lot von einem Punkt P auf eine Gerade g als senkrechte Verbindungsstrecke (Wiederholung)
  ○ Lotgerade
  ○ Lotfußpunkt L
  ○ Lotgerade als Mittelsenkrechte einer geeigneten Strecke $\overline{AB}$ auf g
  ○ Sprechweise: Fällen eines Lotes
• Grundkonstruktion: Lot
	Die Schülerinnen und Schüler
	• stellen Senkrechten zu Geraden durch Falten her,
	• konstruieren Senkrechten zu Geraden mit Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• identifizieren die Lotgerade als besondere Mittelsenkrechte,
	• konstruieren das Lot von bzw. die Lotgerade durch P auf g mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• konstruieren den Lotfußpunkt zu P auf g mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• konstruieren Spiegelpunkte mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware.

Winkelhalbierende • <u>Definition</u>: Die Gerade, die durch den Scheitel eines Winkels verläuft, und den Winkel in zwei maßgleiche Teilwinkel zerlegt, heißt Winkelhalbierende des Winkels. • Winkelhalbierende als Symmetrieachse der Figur aus zwei Strahlen mit einem gemeinsamen Anfangspunkt • Alle Punkte eines Winkels, die von den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand haben, liegen auf der Winkelhalbierenden des Winkels. • Grundkonstruktion: Winkelhalbierende	Die Schülerinnen und Schüler • stellen die Winkelhalbierende eines Winkels durch Falten her und untersuchen deren Eigenschaften, • begründen, dass ein Punkt auf der Winkelhalbierenden eines Winkels den gleichen Abstand von den beiden Schenkeln hat, • konstruieren die Winkelhalbierende eines Winkels mithilfe von Zirkel und Lineal sowie mithilfe einer Geometriesoftware, • beschreiben Konstruktionen.
Umkreis und Inkreis von Dreiecken • besondere Dreiecke ○ Ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln heißt spitzwinkliges Dreieck.	Die Schülerinnen und Schüler • entdecken durch händische Konstruktion sowie mithilfe einer Geometriesoftware, dass sich die Mittelsenkrechten.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
○ Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck. - Kathete - Hypotenuse ○ Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinkliges Dreieck. • Umkreis eines Dreiecks ○ Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ○ Lage des Umkreismittelpunktes je nach Dreiecksart • Inkreis eines Dreiecks ○ Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ○ Radius des Inkreises als Länge der Lotstrecke des Inkreismittelpunktes auf die Seiten des Dreiecks	Die Schülerinnen und Schüler • eines beliebigen Dreiecks in genau einem Punkt schneiden, • begründen, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat, • zeichnen den Umkreis eines Dreiecks (auch mithilfe einer Geometriesoftware), • ermitteln den Mittelpunkt eines Kreises durch drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, • untersuchen die Lage des Umkreismittelpunktes in Abhängigkeit von der Dreiecksart mithilfe einer Geometriesoftware, • entdecken durch händische Konstruktion sowie mithilfe einer Geometriesoftware, dass sich die Winkelhalbierenden eines beliebigen Dreiecks in genau einem Punkt schneiden, • entdecken mithilfe einer Geometriesoftware, dass der Inkreis eines beliebigen Dreiecks die drei Seiten des Dreiecks berührt, • zeichnen den Inkreis eines Dreiecks (auch mithilfe einer Geometriesoftware).

Basisbegriffe

Dreieck (rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig), Fällen eines Lotes, Inkreis (-mittelpunkt), Lot (-gerade, -fußpunkt), Mittelsenkrechte, Umkreis (-mittelpunkt), Winkelhalbierende

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Konstruktionsbeschreibungen sollten sich auf grundlegende Konstruktionen beschränken. Beim Erstellen von Konstruktionsbeschreibungen können Bildfolgen in Form von „Filmstreifen“ zum Einsatz kommen.

Vorschläge und Hinweise

- Die Entdeckung, dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden, kann arbeitsteilig im Klassenverband erfolgen, indem alle Lernenden ihre händischen Konstruktionen an einem selbstgewählten (insbesondere spitzwinkligen) Dreieck durchführen. Der Einsatz einer Geometriesoftware ermöglicht den Schülerinnen und Schülern im Nachgang die Erkenntnis, dass die Mittelsenkrechten in jedem Dreieck einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen und dass darüber hinaus die Eckpunkte des Dreiecks immer auf einem Kreis um diesen Schnittpunkt liegen.
- Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden eines spitzwinkligen Dreiecks lässt sich auch falten, um so die Abstandseigenschaften zu den Ecken bzw. den Seiten besser zu begreifen.
- Die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dienen dem Herausstellen von mathematischen Zusammenhängen (wie beispielsweise der Ortslinieneigenschaften). Daher sollte der Übergang von händischen Konstruktionen zu Zeichnungen unter Verwendung des Geodreiecks aus zeitlichen Gründen sowie der Übersichtlichkeit wegen erst im Kontext von Um- und Inkreis erfolgen.
- Als „Forscheraufgabe“ können Dreiecksvermessungen in Feld und Flur dienen, z. B. zur maßstäblichen Ermittlung unzugänglicher Größen.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Durchführung von Konstruktionen mithilfe einer Geometriesoftware

Fakultative Inhalte

- *Begründung, dass die Mittelsenkrechte einer Kreissehne durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft*
- *Rekonstruktion des Mittelpunkts eines Kreises*
- *Begründung, dass sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden*
- *Beweis, dass ein Dreieck gleichseitig ist, wenn Umkreis- und Inkreismittelpunkt zusammenfallen*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie
- Klassenstufe 7: Winkel in Figuren
- Klassenstufe 8: Kongruenz und Dreieckskonstruktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Einfallslot
- Winkelspiegel bei Vermessungen

Die Prozentrechnung als eine eigens symbolisierte Behandlung spezieller Bruchrechen- oder Dreisatzaufgaben baut auf den Grundvorstellungen zu Brüchen sowie den entsprechenden Grundaufgaben aus den Klassenstufen 5 und 6 auf. Damit bietet sie einerseits die Möglichkeit einer immanenten Wiederholung und Vertiefung wichtiger Grundvorstellungen zu Brüchen und andererseits können die aus dem Themenfeld „Brüche“ bekannten geometrischen Darstellungen gewinnbringend zum Aufbau des Prozentverständnisses genutzt werden.

In der Eingebundenheit im Alltag mit vielfältigen Begriffen, wie sie z. B. im Handel, im Steuerwesen und auf dem Kapitalmarkt auftreten, liegen zugleich Reiz und Schwierigkeit des Prozentbegriffs. Modellieren und Interpretieren erweisen sich als wesentliche Tätigkeiten, nicht zuletzt auch vor dem Hintergrund, dass die prozentualen Sprechweisen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wiederkehren. Taschenrechner und digitale Mathematikwerkzeuge erleichtern die Verwendung und Auswertung realistischer Daten.

Beim Lösen der drei Grundaufgaben ist das Erkennen des Grundwertes in Kontexten von besonderer Bedeutung, gerade auch bei mehrstufigen Prozentwertberechnungen und inversen Schlüssen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**

Prozentsätze und Bruchteile
 	
• Prozent:
  ○ Prozentzahl p
  ○ Prozentzeichen
  ○ Prozentsatz $p\%$
• Prozentsatz als alternative Darstellungsform für eine Bruchzahl
	Die Schülerinnen und Schüler
	• nennen Beispiele für Prozentangaben im Alltag (z. B. Preisnachlässe),
	• erläutern die Wortbedeutung des Begriffs Prozent und die Entstehung des Prozentzeichens,
	• erläutern den Zusammenhang zwischen der Prozentschreibweise und der Bruch- bzw. Dezimalbruchschreibweise einer Bruchzahl,,
	z. B. $60\% = \frac{60}{100} = 0{,}06$
	• stellen Prozentsätze geometrisch dar und umgekehrt,
	• bestimmen zu Prozentsätzen eine Bruch- bzw. Dezimalbruchdarstellung und umgekehrt,
	• wandeln einfache Prozentsätze (z. B. 2%, 4%, 5%, 10%, 12,5%, 20%, 25%, 33,$\bar{3}$%, 50%, 75%) im Kopf in eine Bruch- bzw. Dezimalbruchdarstellung um und umgekehrt,
	• interpretieren Streifen-, Balken- und Kreisdiagramme mit Prozentangaben.

5. Prozentrechnung	Mathematik 7
Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Grundaufgaben der Prozentrechnung • Prozentwert W • Grundwert G • $W = \frac{p}{100} \cdot G$	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen die Grundaufgaben der Prozentrechnung geometrisch, • bestimmen Prozentwerte (auch in Sachkontexten) mit dem Dreisatzverfahren und mit der entsprechenden Formel, • bestimmen Prozentzahlen bzw. Prozentsätze (auch in Sachkontexten) mit dem Dreisatzverfahren und mit der entsprechenden Formel, • bestimmen Grundwerte (auch in Sachkontexten) mit dem Dreisatzverfahren und mit der entsprechenden Formel, • lösen einfache Grundaufgaben der Prozentrechnung im Kopf.

Prozentrechnung im Alltag
 	
• Promille ‰
• Prozentuale Zu- bzw. Abnahme
  ○ erhöhter / verminderter Grundwert
  ○ Wachstumsfaktor (Zunahme- bzw. Abnahmefaktor)
  ○ Wachstumsfaktor bei mehrstufigen Aufgaben als Produkt der Wachstumsfaktoren der einzelnen Stufen
• Fachbegriffe aus den Bereichen
  ○ Handel und Gewerbe:
    - Brutto, Netto
    - Gewinn, Verlust
    - Rabatt
    - Mehrwertsteuer (MwSt.)
  ○ Straßenverkehr (Verkehrsschilder):
    - Steigung (Gefälle als negative Steigung)
	Die Schülerinnen und Schüler
	• erläutern den Begriff „Promille“,
	• bestimmen erhöhte bzw. verminderte Grundwerte sowie Wachstumsfaktoren in Sachkontexten (auch im Kontext BNE möglich),
	• interpretieren Prozentsätze über 100% in Sachkontexten,
	• unterscheiden „Änderung um p Prozent“ von „Änderung auf p Prozent“,
	• lösen ein- und mehrstufige Sachaufgaben (auch mit wechselnden Prozentsätzen; auch im Kontext BNE möglich),
	• erläutern anhand von Beispielen, dass sich der Wachstumsfaktor bei mehrstufigen Wachstumsaufgaben als Produkt der Wachstumsfaktoren der einzelnen Stufen ergibt,
	• bestimmen in einfachen Fällen Zinseszinsen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
○ Banken und Versicherungen: - Kapital K - (Jahres-)Zinsen Z - Zinssatz $p\%$ - Zinseszins • Begriffe „Prozent“ und „Prozentpunkt“	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern anhand eines Beispiels den Unterschied zwischen „Prozent“ und „Prozentpunkt“, • nehmen zu Aussagen (beispielsweise aus den Medien) im Kontext von Prozentangaben kritisch Stellung (auch im Kontext BNE möglich).

Basisbegriffe

Abnahmefaktor, Brutto, Gefälle, Gewinn, Grundwert (erhöht, vermindert), Kapital, mehrstufig, Mehrwertsteuer (MwSt.), Netto, Promille, Prozent (-punkt, -satz, -wert, -zeichen), Rabatt, Steigung, Verlust, Wachstumsfaktor, Zins (Jahres-, Zinses-), Zinssatz, Zunahmefaktor, zweistufig

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Bei der geometrischen Veranschaulichung von Prozentsätzen bieten sich insbesondere Streifendiagramme an. Enaktiv kann dies durch den Einsatz von „Prozentbändern“ (Gummibänder mit Skalierung) unterstützt werden.
- Streifendiagramme eignen sich zudem zur Veranschaulichung der Grundaufgaben der Prozentrechnung sowie von erhöhtem bzw. vermindertem Grundwert.
- Die Sachkontexte sollten exemplarisch behandelt und auf eine angemessene Anzahl beschränkt werden.
- Taschenrechner und digitale Mathematikwerkzeuge entlasten beim numerischen Arbeiten.
- mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Recherchen zur prozentualen Aufteilung von Gewinnen auf Produzenten, Zwischenhändler und Verkäufer von Kleidungsstücken und Vergleich solcher Daten bei Produktionen in Deutschland mit Produktionen in anderen Ländern (beispielsweise Südostasien)

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Datenrecherche mithilfe geeigneter Suchmaschinen (beispielsweise zur Zusammensetzung von Nahrungsmitteln oder zu Wahlergebnissen)

Fakultative Inhalte

- *Einbeziehen von Laufzeiten bei der Zinsrechnung*
- *Projekt: Prozente in der Zeitung*

Vorschläge und Hinweise

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Brüche
- Klassenstufen 5/6: Statistische Daten
- Themenfeld: Einführung in die Stochastik
- Klassenstufe 10: Wachstumsprozesse und Exponentialfunktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Messfehlerberechnung in den Naturwissenschaften

Nachdem in den Klassenstufen 5 bzw. 6 der verständige Umgang mit Daten thematisiert wurde, steht nun als zweite Säule der Leitidee „Daten und Zufall“ die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Fokus. Ausgehend von konkret durchgeführten und ausgewerteten Zufallsexperimenten werden Grundbegriffe wie „Zufallsexperiment“, „Ergebnis“ und „Ereignis“ eingeführt.

Neben realen Experimenten liefern auch Simulationen mit Stochastik-Tools die Daten, die als Grundlage von Mathematisierungen dienen können. Sowohl bei der Auswahl der Experimente als auch bei der Interpretation und Anwendung der Ergebnisse erfahren die Schülerinnen und Schüler die Alltagsrelevanz der untersuchten Phänomene. Dabei sollte auf ein breites Spektrum an Zufallsexperimenten geachtet werden.

Aufbauend auf dem Begriff der relativen Häufigkeit, der bereits in den Klassenstufen 5 bzw. 6 eingeführt wurde und deren Werte sich bei einer großen Anzahl an Versuchsdurchführungen stabilisieren, wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit eingeführt und als Eintrittschance gedeutet. Umgekehrt dient die (beispielsweise aus geometrischen Überlegungen) bekannte Wahrscheinlichkeit von Ereignissen als Prognose für relative Häufigkeiten bei der konkreten Durchführung von Zufallsexperimenten.

Die offensichtliche Additivität der relativen Häufigkeiten von Elementarereignissen führt zum Wahrscheinlichkeitsbegriff bei Ereignissen. Anwendung finden die neuen Zusammenhänge auch bei der Untersuchung von Laplace-Experimenten.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**

Zufallsexperimente
 	
• Zufall in Situationen des Alltags
• Zufallsexperiment
    ○ Ergebnisse
    ○ Ergebnismenge, Symbol Ω
    ○ Merkmale:
        - Die Ergebnismenge mit allen möglichen Ergebnissen kann schon vor der Durchführung angegeben werden.
        - Das Ergebnis einer einzelnen Durchführung kann nicht vorhergesagt werden.
        - Das Experiment kann unter gleichen Bedingungen uneingeschränkt wiederholt werden.
• absolute und relative Häufigkeit
• Stabilisierung der relativen Häufigkeiten
	Die Schülerinnen und Schüler
	• beschreiben Zufallserscheinungen im Alltag,
	• entscheiden bei Situationen im Alltag, ob diese dem Zufall unterliegen,
	• führen konkrete Zufallsexperimente durch und dokumentieren die Ergebnisse,
	• beschreiben Zufallsexperimente verbal,
	• geben Ergebnismengen von Zufallsexperimenten verbal beschrieben und formal an,
	• bestimmen zu konkreten Durchführungen von Zufallsexperimenten absolute und relative Häufigkeiten,
	• untersuchen das Verhalten der relativen Häufigkeiten bei einer großen Anzahl an Versuchsdurchführungen (auch durch Simulation mit Stochastiksoftware oder mit einem Tabellenkalkulationsprogramm),
	• geben an, dass der Wert der Summe der relativen Häufigkeiten aller Ergebnisse 1 ist.

6. Einführung in die Stochastik — Mathematik 7

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten
 	
• Ereignisse:
  ○ als Teilmengen von Ω, Symbol $\subset$
  ○ Symbole $A, B, C,$ ...
  ○ Elementarereignisse als einelementige Teilmengen
  ○ sicheres Ereignis, Symbol Ω
  ○ unmögliches Ereignis, Symbol $\{\,\}$
  ○ Gegenereignis, Symbol $\bar{A}$
• Begriff der Wahrscheinlichkeit
  ○ Relative Häufigkeit bei großer Anzahl an Durchführungen als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
  ○ Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Eintrittschance
  ○ Eigenschaften:
    - Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Zahl, die mindestens 0 und höchstens 1 ist.
    - Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1.
  ○ Wahrscheinlichkeit als Prognose für die relative Häufigkeit bei vielen Versuchen
  ○ Problematik der Vorhersage des Einzelfalles
• Wahrscheinlichkeit
  ○ der Elementarereignisse
  ○ eines beliebigen Ereignisses A als Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Elementarereignisse
    Symbol $P(A)$
  ○ des sicheren Ereignisses
  ○ des unmöglichen Ereignisses
  ○ des Gegenereignisses
	Die Schülerinnen und Schüler
	• unterscheiden Ergebnis und Ereignis,
	• fassen Ergebnisse zu Ereignissen zusammen,
	• geben für konkrete Zufallsexperimente Elementarereignisse, Ereignisse, Gegenereignisse, das unmögliche Ereignis und das sichere Ereignis verbal beschrieben und formal an,
	• begründen mit Hilfe der Eigenschaften der relativen Häufigkeit die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit,
	• modellieren Zufallsexperimente durch Festlegung der Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten,
	• vergleichen Wahrscheinlichkeitsmodelle mit Daten aus Zufallsexperimenten,
	• bestimmen die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen,
	• interpretieren berechnete Wahrscheinlichkeiten in Hinblick auf die Eintrittschance,
	• bewerten Aussagen (beispielsweise aus den Medien), die auf Wahrscheinlichkeiten beruhen, kritisch.

6. Einführung in die Stochastik — Mathematik 7

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Laplace-Experimente

- Gleichwahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse
- Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Omega|}$ eines Elementarereignisses
- Laplace-Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:
  - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Verbal: Die Laplace-Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A kann als Quotient aus der „Anzahl der für A günstigen Ergebnisse“ und der „Anzahl aller möglichen Ergebnisse“ beschrieben werden.

Prozessbezogene Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

- entscheiden begründet, ob Zufallsexperimente als Laplace-Experimente interpretiert werden können,
- berechnen Laplace-Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.

Basisbegriffe

Ergebnis (-menge), Ereignis (Elementar-, sicher, unmöglich), Laplace-Experiment, Teilmenge, Wahrscheinlichkeit (Laplace-), Zufallsexperiment

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Eine besondere Bedeutung liegt in der konkreten Durchführung von Zufallsexperimenten (wie z. B. Ziehen aus Urnen, Drehen von Glücksrädern, Werfen von Reißnägeln, Kronkorken oder Spielwürfeln) und dem Dokumentieren der Ergebnisse (z. B. in Urlisten) sowie dem anschließenden Aufbereiten mittels digitaler Mathematikwerkzeuge.
- Im Verlauf der Unterrichtsreihe sollten neben den „klassischen“ Zufallsgeneratoren Münzen, Würfel, Urne und Glücksrad auch vielfältige weitere Zufallsgeneratoren wie beispielsweise „gezinkte“ Würfel, regelmäßige Polyeder, Klemmbausteine, unregelmäßig geformte Körper (z. B. Riemer-Quader) etc. zum Einsatz kommen.
- Die Behandlung der formalen Aspekte sollte auf den erforderlichen Umfang beschränkt bleiben.
- Es genügt, im Unterricht endliche Ergebnismengen zu betrachten.
- Bei der unterrichtlichen Behandlung der Stabilisierung von relativen Häufigkeiten empfiehlt sich ein kollaboratives Arbeiten auch mithilfe geeigneter digitaler Werkzeuge zur Kommunikation und Kooperation (z. B. Etherpad oder EtherCalc), indem Schülerinnen und Schüler zu einem vorgegebenen Zufallsexperiment experimentell relative Häufigkeiten bestimmen, in einem gemeinsamen digitalen Dokument zusammentragen und auswerten. Noch längere Versuchsreihen können durch Simulationen erzeugt und anschließend ausgewertet werden.

Vorschläge und Hinweise

- Das mehrfache Ausführen eines Zufallsexperiments mit einer hohen Anzahl an Versuchen zur Bestimmung der relativen Häufigkeit (z. B. 500 Münzwürfe) lässt erkennen, dass sich die relative Häufigkeit innerhalb eines sich in der graphischen Darstellung erkennbaren Trichters stabilisiert.
- Die in vielen Lehrbüchern übliche Sprechweise „Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen“ sollte im Laufe der Unterrichtsreihe begrifflich präzisiert werden.
- Eine stärker formalisierte und axiomatische Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bleibt der Behandlung der Stochastik in der Oberstufe vorbehalten.
- Zur Abgrenzung von Laplace-Experimenten von Nicht-Laplace-Experimenten bieten sich beispielsweise Untersuchungen an gezinkten Würfeln oder an Glücksrädern auf der schiefen Ebene an.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Planung und Durchführung konkreter Zufallsexperimente mit Erstellung einer Ergebnis-Verlaufstabelle und nachfolgender Auswertung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms
- Erzeugung von Zufallszahlen mithilfe von Taschenrechner und Tabellenkalkulationsprogrammen
- Einsatz von GeoGebra-Applets, Stochastik-Tools und Simulationsprogrammen zu Laplace-Würfeln, „gezinkten Würfeln“, Urnen-Experimenten oder Glücksrädern
- eigenständige Simulation von Zufallsexperimenten mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen

Fakultative Inhalte

- *Efron-Würfel*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit Brüchen
- Klassenstufen 5/6: Statistische Daten
- Themenfeld: Prozentrechnung
- Klassenstufe 10: Mehrstufige Zufallsexperimente

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Pierre Simon de Laplace (1749-1827)
- Wahlprognosen

Die abbildungsgeometrischen Grundbegriffe, die bereits in den Klassenstufen 5 bzw. 6 behandelt wurden, bilden die Grundlage zur Untersuchung von Winkeln an Geradenkreuzungen. Das Entdecken zentraler Sätze wie des Stufen- oder des Wechselwinkelsatzes kann durch den Einsatz digitaler Geometriewerkzeuge unterstützt werden.

Beim Berechnen von Winkeln in Figuren wird neben dem mathematischen Argumentieren auch die Problemlösekompetenz geschult, da hierzu häufig mehrere Sätze kombiniert bzw. geeignete Hilfsstrecken und Winkel in einer Figur erkannt werden müssen.

Im Sinne einer zunehmenden Präzisierung und Formalisierung unterscheiden die Schülerinnen und Schüler verstärkt zwischen Definitionen und mathematischen Sätzen. Damit diese korrekt begründet werden können, sollte auf eine exakte Beschreibung von Sachverhalten geachtet werden. Um bei Sätzen die Voraussetzung und die Behauptung klar zu trennen, empfiehlt sich eine Formulierung in der Wenn-Dann-Form. Als erstes Beweisverfahren lernen die Schülerinnen und Schüler den direkten Beweis beim Innenwinkelsatz in Dreiecken oder beim Satz des Thales kennen.

Neben dem Kehrsatz eines mathematischen Satzes wird auch die Kontraposition betrachtet. Zentral ist die Erkenntnis, dass ein Satz und dessen Kehrsatz, anders als Satz und Kontraposition, nicht den gleichen Wahrheitswert haben müssen. Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge bieten sich Beispiele aus dem Alltag oder der Zahlentheorie an. Der Beweis des Kehrsatzes des Satzes von Thales durch Kontraposition vermittelt den Schülerinnen und Schülern Einblick in ein zweites Beweisverfahren.

<table>
<tr><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th></tr>
<tr><td>

Winkel an Geradenkreuzungen

- Begriffe:
  - Nebenwinkel
  - Scheitelwinkel
  - Stufenwinkel
  - Wechselwinkel
- <u>Scheitelwinkelsatz:</u> Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, dann haben sie das gleiche Winkelmaß.
- <u>Satz über Stufen- und Wechselwinkel:</u> Wenn Stufen- bzw. Wechselwinkel an parallelen Geraden liegen, dann sind sie maßgleich.
- Begriff: Orthogonalität zweier Geraden

</td><td>

Die Schülerinnen und Schüler

- geben bei Geradenkreuzungen Neben- und Scheitelwinkel an,
- begründen den Scheitelwinkelsatz,
- begründen die Orthogonalität der beiden Winkelhalbierenden an einer Geradenkreuzung,
- geben Stufen- und Wechselwinkel in geeigneten Figuren an,
- begründen die Maßgleichheit von Wechselwinkel an Parallelen, z. B. mit Hilfe der Drehsymmetrie,
- begründen die Maßgleichheit von Stufenwinkeln an Parallelen,
- bestimmen an Geradenkreuzungen Winkelmaße.

</td></tr>
</table>

7. Winkel in Figuren	Mathematik 7
Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Winkelsummen in Vielecken • Innenwinkelsatz im Dreieck: In einem Dreieck beträgt der Wert der Summe aller Innenwinkelmaße 180°. • Innenwinkelsatz im Viereck: In einem Viereck beträgt der Wert der Summe aller Innenwinkelmaße 360°. • Satz: In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel das Maß 60°.	Die Schülerinnen und Schüler • beweisen den Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck (direkter Beweis), • untersuchen in Vielecken den Zusammenhang zwischen der Innenwinkelsumme und der Anzahl der Ecken, • berechnen Winkelmaße in Dreiecken, Vielecken und weiteren Figuren, • berechnen die Innenwinkelsumme bzw. die Anzahl der Ecken in Vielecken, • übersetzen verbale Formulierungen zu Zusammenhängen zwischen Winkelmaßen in Gleichungen und bestimmen deren Lösungen, • begründen, dass in einem gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel das Maß 60° besitzen.

Der Satz des Thales
 	
• Satz des Thales: Wenn bei einem Dreieck ABC der Eckpunkt C auf einem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
• Bezeichnung: Ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ heißt Thaleskreis über $\overline{AB}$.
• Thaleskreis
  ○ als Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks
  ○ über der Diagonale eines Rechtecks als Umkreis eines Rechtecks
• Lagebeziehungen von Kreis und Gerade
  ○ Passante
  ○ Sekante
  ○ Tangente
  ○ Orthogonalität zum Berührradius
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen (auch mithilfe einer Geometriesoftware), dass von jedem Punkt des Thaleskreis aus der vorgegebene Durchmesser unter einem rechten Winkel erscheint,
	• beweisen den Satz des Thales,
	• berechnen mithilfe des Satzes des Thales Maße von Winkeln in Figuren,
	• begründen mithilfe des Lotes die Orthogonalität von Kreistangente und Berührradius,
	• konstruieren die Tangente an einen Kreis in einem Punkt der Kreislinie,
	• konstruieren die Tangenten an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Kehrsatz und Kontraposition
• Begriffe:
  ○ Kehrsatz
  ○ Kontraposition
• Eine Wenn-dann-Aussage und ihre Kontraposition haben stets den gleichen Wahrheitswert.
• <u>Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes:</u> Wenn Stufenwinkel maßgleich sind, dann liegen sie an parallelen Geraden.
• <u>Kehrsatz des Wechselwinkelsatzes:</u> Wenn Wechselwinkel maßgleich sind, dann liegen sie an parallelen Geraden.
• <u>Kehrsatz des Satzes von Thales:</u> Wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, dann liegt C auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$.
	Die Schülerinnen und Schüler
	• formulieren zu Wenn-dann-Sätzen den Kehrsatz,
	• zeigen an geeigneten Sätzen, dass der Kehrsatz eines wahren Satzes nicht notwendig wahr ist,
	• geben zu einem Wenn-dann-Satz die Kontraposition an,
	• geben an, dass ein Satz und seine Kontraposition stets den gleichen Wahrheitswert haben,
	• geben den Kehrsatz des Stufen- und Wechselwinkelsatzes an,
	• geben den Kehrsatz des Satzes des Thales an,
	• beweisen den Kehrsatz des Stufenwinkelsatzes oder den Kehrsatz des Satzes des Thales durch Kontraposition,
	• untersuchen, ob Geraden in Figuren parallel sind.

Basisbegriffe

Kehrsatz, Kontraposition, Nebenwinkel, Orthogonalität, Passante, Scheitelwinkel, Sekante, Stufenwinkel, Tangente, Wechselwinkel

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Um bei mathematischen Sätzen Voraussetzung und Behauptung sprachlich klar zu trennen, sollten sie stets in der Wenn-dann-Form formuliert werden.
- Der Scheitelwinkelsatz kann sowohl mit Hilfe des Nebenwinkels begründet werden als auch über die Eigenschaft der Winkeltreue bei einer Punktspiegelung.
- Die Maßgleichheit von Stufenwinkeln an parallelen Geraden kann sowohl aus dem Wechsel- und dem Scheitelwinkelsatz hergeleitet werden als auch über die Winkeltreue bei einer Verschiebung.
- Die Maßgleichheit von Wechselwinkeln an parallelen Geraden kann durch eine geeignete Punktspiegelung und der Eigenschaft der Winkeltreue begründet werden.

Vorschläge und Hinweise

- Zur Herleitung des Beweises des Innenwinkelsatzes bieten sich unterschiedliche enaktive Zugänge an, die zu unterschiedlichen Beweisen führen: Abreißen zweier Ecken und Anlegen an die Dritte führt zum Beweis über parallele Geraden; das Falten entlang einer Mittelparallelen und das bündige Einklappen der weiteren Ecken führt zum Beweis über Winkeltreue bei Spiegelungen.
- Der Satz des Thales lässt sich beispielsweise enaktiv an einem Geobrett (Rückseite) entdecken, die Umkehrung durch bündiges Schieben des rechten Winkels eines Geodreiecks durch einen geraden Schnitt in einem Blatt Papier und Markieren der möglichen Lagen des Eckpunkts.
- Konstruktionen von Tangenten an Kreise sollten zunächst händisch durchgeführt werden, bevor ein digitales Geometriewerkzeug zum Einsatz kommt.
- Zu Konstruktionen sollten auch Konstruktionsbeschreibungen formuliert werden.
- Die Tatsache, dass eine Wenn-dann-Aussage und ihre Kontraposition stets den gleichen Wahrheitswert haben, kann in dieser Klassenstufe nicht formal begründet werden und sollte daher altersangemessen anhand von Beispielen aus dem Alltag veranschaulicht werden (z. B. „Wenn Sonntag ist, dann ist schulfrei.“).
- Der Beweis des Kehrsatzes des Satzes des Thales durch Kontraposition bietet den Vorteil, dass die Lage des Punktes C dynamisch gesehen werden kann und insbesondere die Fälle, in denen C innerhalb bzw. außerhalb des Kreises liegen, betrachtet werden können.
- Die Formulierung „genau dann …, wenn …“ bleibt höheren Klassenstufen vorbehalten.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Einsatz eines digitalen Geometriewerkzeugs zur Entdeckung des Stufen- und Wechselwinkelsatzes an parallelen Geraden
- Einsatz eines digitalen Geometriewerkzeugs zur Entdeckung des Satzes des Thales
- Konstruktion der Tangenten an einen Kreis mithilfe eines digitalen Geometriewerkzeugs

Fakultative Inhalte

- *Außenwinkelsatz im Dreieck und dessen Beweis*
- *Konstruktion von Winkeln mit besonderen Winkelmaßen wie z. B. 60° bzw. 30° mit Zirkel und Lineal*
- *Zentriwinkelsatz und Peripheriewinkelsatz*
- *Sehnen- und Tangentenvierecke*
- *Beweis, dass in jedem Dreieck der längeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt*
- *Satz: In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber.*
- *Satz: In jedem Dreieck liegt der längeren Seite der größere Winkel gegenüber.*

Vorschläge und Hinweise

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie
- Klassenstufe 7: Gleichungen
- Klassenstufe 7: Geometrische Konstruktionen
- Klassenstufe 8: Kongruenz und Dreieckskonstruktionen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Thales von Milet (um 600 v.Chr.)
- 90°-Winkelspiegel, Drehspiegel

Anhang

Grundstock von Operatoren[i]

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

[i] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Grundstock von Operatoren. Berlin. 2019.
Download: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/ (Stand: 28.04.2023)