Mathematik

Lehrplan
Neunjähriges Gymnasium
Klassenstufen 5 und 6

Bild: patpitchaya/stock.adobe.com

Ministerium für
Bildung und Kultur
SAARLAND

Inhalt

Vorwort

Schulischer Bildung kommt die Schlüsselaufgabe zu, Kinder und Jugendliche zu befähigen, ihre Persönlichkeit zu entfalten, Fertigkeiten und Kenntnisse zur Teilnahme am gesellschaftlichen Leben zu erwerben und sich in der modernen Gesellschaft zu orientieren. Bildung ist wesentliche Voraussetzung dafür, dass junge Menschen zukünftig ihr Leben und ihre Umwelt selbstbestimmt und in sozialer Verantwortung gestalten und somit an der Bewältigung der gesellschaftlichen, politischen, ökologischen sowie technologischen Herausforderungen der Zukunft mitwirken können.

Schule muss einerseits auf die tiefgreifenden Veränderungsprozesse der digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Transformation reagieren und anderseits genügend Raum für individuelle Lern- und Bildungsprozesse ermöglichen. Vor diesem Hintergrund hat der Landtag des Saarlandes entschieden, die Gymnasien qualitativ weiterzuentwickeln und das neunjährige Gymnasium zum Schuljahr 2023/2024 einzuführen.

Mit einer deutlich erhöhten Gesamtstundenzahl bis zum Abitur sind die Voraussetzungen geschaffen, den digitalen, gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Herausforderungen im neunjährigen Bildungsgang angemessen zu begegnen und die Gymnasien zukunftsfähig zu gestalten. So gelingt auch eine moderne zeitliche Rhythmisierung des Schulalltags, die gleichzeitig mehr persönlichen Freiraum im Alltag zugesteht. Eigenständige Schulprofile mit unterschiedlichen Zweigen ermöglichen eine individuelle Schwerpunktsetzung entsprechend den Interessen und Neigungen der Schülerinnen und Schüler.

Als Grundlage des schulischen Unterrichtens und Lernens liegen modernisierte Lehrpläne vor, in welchen die Querschnittsthemen Medienbildung und Digitalität, Bildung für Nachhaltige Entwicklung, Demokratiebildung und Berufsorientierung jahrgangs- und fächerübergreifend eingebunden sind. Alle Lehrpläne folgen konsequent dem Grundsatz der Kompetenzorientierung und berücksichtigen die aktualisierten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die Sekundarstufe I. Im engen Austausch mit Expertinnen und Experten der saarländischen Hochschulen wurden die aktuellen Erkenntnisse der jeweiligen Fachdidaktiken für die Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums berücksichtigt.

Den besonderen Bedarfen der Orientierungsphase wird in einem gemeinsamen Lehrplan für die Klassenstufen 5 und 6 Rechnung getragen. Die Lehrpläne ab Klassenstufe 7 sind in der Regel als Einzeljahrgänge konzipiert. Dennoch haben die Schulen die Möglichkeit, einzelne Fächer epochal auch über Klassenstufen hinweg zu rhythmisieren.

Durch vernetzte Lehrpläne soll fächerübergreifendes, projektorientiertes Lernen ermöglicht werden, um den Unterricht selbstwirksam und anwendungsorientiert gestalten zu können. In der Differenzierung von verbindlichen und fakultativen Inhalten öffnet sich hinreichend Raum für exemplarisches Lernen und vertieftes Arbeiten; durch die integrierten Hinweise und Vorschläge zum fächerübergreifenden Arbeiten wird zum Erwerb von vernetztem Wissen und übergeordneten Kompetenzen motiviert.

Die modernisierten Lehrpläne des neunjährigen Gymnasiums legen so die Grundlage für die Weiterentwicklung der Unterrichts- und Schulkultur im neunjährigen Bildungsgang.

Zum Umgang mit dem Lehrplan

Der Mathematikunterricht fördert maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen durch das Vermitteln von Methodenkompetenz, Sachwissen und inneren Haltungen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind somit wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachlichen Grundlagen für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist aber auch ein eigenständiger intellektueller Wert und stellt einen wichtigen Beitrag der Mathematik zu unserer Kultur dar. Sie ermöglicht eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leitet zu verantwortungsbewusstem Handeln an. In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen.

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation **methodischer Vorgehensweisen** voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.
- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.
- Im Unterricht kann der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und Medien den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

Kompetenzerwartungen

Der fachspezifische Anspruch der Bildungsstandards[1] im Fach Mathematik wird durch das nachstehende **Kompetenzschema** abgebildet, auf das sich der Lehrplan bezieht.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen **(Leitideen)**	**Prozessbezogene mathematische Kompetenzen** **(allg. math. Kompetenzen)**	**Anforderungsbereiche**
Zahl und Operation	Mathematisch argumentieren	A I Reproduzieren
Größen und Messen	Mathematisch kommunizieren	A II Zusammenhänge herstellen
Strukturen und funktionaler Zusammenhang	Probleme mathematisch lösen	A III Verallgemeinern und Reflektieren
Raum und Form	Mathematisch modellieren	
Daten und Zufall	Mathematisch darstellen	
	Mit mathematischen Objekten umgehen	
	Mit Medien mathematisch arbeiten	

Die in diesem Schema genannten sieben **prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen** erfassen ein weites Spektrum mathematischen Arbeitens. Sie lassen sich dabei nicht scharf voneinander abgrenzen, da beim mathematischen Arbeiten oftmals mehrere Kompetenzen zugleich angesprochen werden.

Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben. Die **inhaltsbezogenen Kompetenzen** werden Leitideen zugeordnet und können damit zur Vernetzung der traditionellen Stoffgebiete beitragen. Im Sinne eines spiralförmigen Vernetzens wechseln sich die Leitideen in der Abfolge aufbauend und wiederholend ab.

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Themenfeldern verzichtet.

[1] KMK: Bildungsstandards für das Fach Mathematik - Erster Schulabschluss (ESA) und Mittleren Schulabschluss (MSA), Berlin. 2022.

Der **Anforderungsbereich I (Reproduzieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit geringerem Komplexitätsgrad wie

- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit mittlerem Komplexitätsgrad wie

- das selbstständige Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,
- das selbstständige Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Der **Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren)** umfasst in der Regel Aufgabenstellungen mit höherem Komplexitätsgrad wie

- das planmäßige und kreative Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- das bewusste und selbstständige Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung neuer Problemstellungen.

Der Aufbau des Lehrplans

Die jahrgangsbezogenen Teile des Lehrplans sind nach Themenfeldern gegliedert, denen jeweils erläuternde Einleitungstexte vorangestellt sind.

Daran anschließend sind in zwei Spalten die verbindlichen inhaltsbezogenen Kompetenzen und die verbindlichen prozessbezogenen Kompetenzen aufgeführt. Diese knüpfen an die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards an. Die bei der Formulierung der prozessbezogenen Kompetenzen verwendeten Operatoren sind gemäß den Erläuterungen im Anhang umzusetzen. Fakultative Inhalte sind lilafarben und kursiv gedruckt.

Der Lehrplan beschränkt sich im Wesentlichen auf Themenfelder und Lerninhalte, die auch Bezugspunkte für schulische und schulübergreifende Leistungsüberprüfungen sind.

Der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge und die Nutzung moderner Kommunikations- und Informationsmedien sind an vielen Stellen des Lehrplans ausdrücklich erwähnt. Darüberhinausgehend sollten digitale Mathematikwerkzeuge – soweit fachdidaktisch naheliegend – durchgängiger Bestandteil des Unterrichts sein. Hinweise im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge gibt auch das Basiscurriculum „Medienbildung und informatische Bildung"[2].

Als Richtwerte für die Gewichtung der verbindlich zu behandelnden Themenfelder bei der Planung des Unterrichts sind Prozentwerte angegeben. Die prozentualen Angaben beziehen sich dabei auf die in den Klassenstufen 5 und 6 insgesamt zur Verfügung stehende Unterrichtszeit. Darüber hinaus lässt der Lehrplan Zeit für Vertiefungen, individuelle Schwerpunktsetzungen, fächerübergreifende Bezüge und die Behandlung aktueller Themen.

Die Reihenfolge der Themenfelder ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Sie nimmt die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.

Jedes Themenfeld im Lehrplan schließt mit Vorschlägen und Hinweisen ab. Die Hinweise sind inhaltlich gegliedert nach den Gesichtspunkten:

- Basisbegriffe
- Vorschläge und Hinweise zu
  - methodischen und fachdidaktischen Erläuterungen
  - digitalen Mathematikwerkzeugen
  - fakultativen Inhalten
  - thematischen Querverbindungen im Lehrplan
  - fächerverbindenden und fachübergreifenden Aspekten

[2] Basiscurriculum „Medienbildung und informatische Bildung“, Klassenstufen 1 bis 10, August 2019

Symbole in Verbindung mit Mengen

Menge der

- natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$
- reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

Weitere Symbole[3]:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$

$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$

$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$

$A \backslash B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$

[3] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Dokument mit mathematischen Formeln. Berlin. 2021. Download: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/ (Stand: 28.04.2023)

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan der Klassenstufen 5 und 6

Nach dem Übergang aus der Grundschule ins Gymnasium geht es in der Klassenstufe 5 zunächst darum, Arbeitstechniken der Grundschule aufzugreifen, daraus gemeinsame Arbeits- und Lernformen zu entwickeln und ein einheitliches Niveau in Bezug auf inhaltliche Anforderungen, auf das Arbeitstempo und auf den Gebrauch der mathematischen Fachsprache anzustreben.

Gleichzeitig gilt es, für ein Arbeitsklima zu sorgen, in dem sich soziale Kompetenzen wie z. B. Kommunikationsfähigkeit und Kooperationsbereitschaft im neuen schulischen Umfeld einspielen und weiter entwickeln können.

Die im Lehrplan formulierten Definitionen gewährleisten Kontinuität über Klassenstufen, Lehrer- und Schulwechsel hinweg. Zugleich geben sie Hinweise über den geforderten mathematischen Präzisierungsgrad.

In jeder Phase des Unterrichts sollten nach Möglichkeit Bezüge zur Alltagswelt und zum Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler hergestellt werden. Nicht zuletzt dadurch ist schon frühzeitig eine sowohl prognostizierende als auch kritisch reflektierende Haltung gegenüber Ergebnissen zu wecken.

Bei der Einführung der Bruchzahlen sowie der ganzen Zahlen gewinnen die Schülerinnen und Schüler Einsicht in die sachliche Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen. Dabei sollen Sinn tragende Vorstellungen sowohl von den Bruchzahlen als auch von den negativen Zahlen entwickelt werden. Die Rechenregeln in den neuen Zahlbereichen genügen der Forderung, dass die bereits behandelten Rechengesetze und Verfahren erhalten bleiben (Permanenzprinzip).

Nach der Einführung der geometrischen Grundbegriffe sowie der Behandlung elementarer Figuren und Körper werden in einem späteren Themenfeld Winkel und Kreise eingeführt, um im Nachgang Eigenschaften von Figuren wie Achsen- und Drehsymmetrie zu untersuchen. Dabei wird Exaktheit beim Beschreiben, Erkennen und Begründen von Sachverhalten sowie beim Zeichnen von Figuren angestrebt. Digitale Mathematikwerkzeuge bieten erweiterte Perspektiven für den inneren Zusammenhang zwischen geometrischen Figuren und Abbildungen. Die Möglichkeit zu dynamisieren, regt zum experimentellen Erkunden an.

Der kritische Umgang mit Daten stellt einen weiteren Schwerpunkt dar. Das Spektrum an Diagrammarten wird um Kreisdiagramme erweitert und die Einführung von Lageparametern ermöglicht weitere Untersuchungen und Vergleiche von Datensätzen. Der kritische Blick der Schülerinnen und Schüler wird durch die Analyse von manipulierenden Darstellungen geschult.

Themenfelder

Themenfelder Klassenstufen 5 und 6	Mathematik[4]
1. Natürliche Zahlen	8%
2. Rechnen mit natürlichen Zahlen	10%
3. Größen	7%
4. Figuren und Körper	10%
5. Flächen- und Rauminhalte	8%
6. Teilbarkeit	7%
7. Brüche	10%
8. Rechnen mit Brüchen	13%
9. Kreis, Winkel, Symmetrie	10%
10. Statistische Daten	7%
11. Ganze Zahlen	10%

[4] Die Prozentangaben beziehen sich auf den Zeitraum von zwei Jahren.

1. Natürliche Zahlen — Mathematik 5/6

Betrachtungen zum Aufbau und zur Struktur der natürlichen Zahlen stehen in diesem Themenfeld im Mittelpunkt. In Verbindung mit dem Dezimalsystem fördern sie das Zahlverständnis.

Der verständige Umgang mit Daten bildet den ersten Schwerpunkt dieses Themenfelds. Das Erheben und Auswerten von Daten, die die Schülerinnen und Schüler in ihrem Umfeld sammeln, ermöglicht neben der Beschäftigung mit verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Daten auch ein gegenseitiges Kennenlernen innerhalb der neuen Klasse.

Begriffe und Symbole der Mengensprache werden nur im notwendigen Umfang eingeführt.

Die Untersuchung des Aufbaus unseres Stellenwertsystems stellt dessen Leistungsfähigkeit im Kontrast zur römischen Zahldarstellung heraus und bietet darüber hinaus einen Zugang zu weiteren Stellenwertsystemen, von denen speziell das Dualsystem betrachtet wird.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Anzahlen	
• Daten • Diagramme (Balken-, Säulen-, Streifendiagramme)	Die Schülerinnen und Schüler • erheben Daten aus ihrem Alltag, • entnehmen Daten aus Diagrammen, • stellen Daten in Diagrammen dar, • interpretieren Diagramme im Sachzusammenhang (auch im Kontext BNE).
Stellenwertsysteme	

• Dezimalsystem
  ○ Stufenzahl und Stellenwert
  ○ Stellenwerttafel
  ○ Rundungsregeln
• Dualsystem als alternative Zahldarstellung
• Kontrast: römisches Zahlensystem
	Die Schülerinnen und Schüler
	• geben die Zifferndarstellung zu Stufenzahlen bis 1 Billiarde an,
	• schreiben im Dezimalsystem Zahlen bis 1 Million als Produktsumme mithilfe von Stufenzahlen,
	• lesen Zahlen bis 1 Milliarde,
	• schreiben Zahlen bis 1 Million in Ziffern,
	• unterscheiden die Begriffe Zahl und Ziffer und geben in Zifferndarstellungen die Stellenwerte jeder Ziffer an,
	• wenden die Rundungsregeln an,
	• runden Daten dem Sachverhalt entsprechend sinnvoll,
	• wandeln Zahlen bis 1024 vom Dezimalsystem ins Dualsystem um und umkehrt,
	• übersetzen römische Zahlzeichen ins Dezimalsystem.

1. Natürliche Zahlen	Mathematik 5/6
Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**

Zahlenmengen
 	
• Mengen:
  ○ Bezeichnung mit großen lateinischen Buchstaben
  ○ aufzählende und beschreibende Mengenschreibweise
• Symbole $\in$ und $\notin$
• leere Menge, Symbol $\{\,\}$
• Symbole $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$
	Die Schülerinnen und Schüler
	• fassen Objekte (insbesondere Zahlen) mit bestimmten Eigenschaften zu Mengen zusammen (z. B. die geraden Zahlen),
	• wandeln aufzählende in beschreibende Mengenschreibweise um und umgekehrt.

Anordnung • Zahlenstrahl • Nachfolger und Vorgänger • <u>Definition</u>: Eine Zahl a heißt kleiner als eine Zahl b, wenn sich der Zahlpunkt von a auf dem Zahlenstrahl links vom Zahlpunkt von b befindet. • Symbole $<, >, =, \leq, \geq, \neq$	Die Schülerinnen und Schüler • lesen natürliche Zahlen am Zahlenstrahl ab und zeichnen Zahlpunkte zu natürlichen Zahlen ein, • nennen zu natürlichen Zahlen n den Vorgänger $n-1$ $(n \neq 0)$ und den Nachfolger $n+1$, • begründen, dass es unbegrenzt viele natürliche Zahlen gibt, • vergleichen große Zahlen auf der Grundlage der Zifferndarstellung.

Basisbegriffe

Dezimalsystem, Dualsystem, Element, größer als, kleiner als, Menge (leere), Nachfolger, Stellenwert (-system), Stufenzahl, Vorgänger, Zahl, Zahlenstrahl, Zahlensystem (römisches), Ziffer

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Die Rundungsregeln sind aus der Grundschule bekannt und werden auf größere Zahlen ausgeweitet.
- Die Schülerinnen und Schüler sollten auf die Internationalität mathematischer Symbole hingewiesen werden, aber auch auf die Verwechslungsgefahr bei der Bezeichnung „Billion" im Englischen für „Milliarde".
- Das Schreiben von Zahlen bis 1 Million als Produktsummen mit Stufenzahlen dient der Vorbereitung des Aufbaus des Dualsystems.
- Auch die Umwandlung zwischen Dualsystem und Dezimalsystem erfolgt mithilfe von Stufenzahlen.

Vorschläge und Hinweise

- Der Lehrplan thematisiert nicht die Anordnung im Sinne der Addition einer (positiven) Zahl, um von der kleineren zur größeren Zahl zu gelangen, sondern nutzt den Zählprozess als Definitionsgrundlage.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Recherchieren des jährlichen Müllaufkommens pro Kopf in Deutschland und anderen Ländern Europas und Interpretation von entsprechenden Diagrammen (z. B. In welchem Land wird am meisten / am wenigsten / genauso viel Müll wie in Deutschland erzeugt?)

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Erstellen von Diagrammen mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen
- digitaler Zahlenstrahl und digitale Stellenwerttafel

Fakultative Inhalte

- *Teilmenge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge*
- *Addieren und Subtrahieren im Dualsystem*
- *weitere Stellenwertsysteme*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit natürlichen Zahlen
- Klassenstufen 5/6: Teilbarkeit
- Klassenstufen 5/6: Ganze Zahlen
- Klassenstufen 5/6: Statistische Daten

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- historische Zahlensysteme, z. B. der Ägypter, Babylonier und Maya
- Zahlennamen in den Fremdsprachen
- andere Zahlenleiter im angelsächsischen Raum, z.B. Zahlwort Billion in den USA für Milliarde
- Geschichte der Null

Im Zuge der Behandlung dieses Themenfeldes werden die bereits aus der Grundschule vorhandenen Kenntnisse zu den Grundrechenarten wiederholt und vertieft. In diesem Kontext lernen die Schülerinnen und Schüler erstmals Variablen als „Platzhalter“ kennen.

Zahlenfolgen ermöglichen einen ersten Zugang zu funktionalen Zusammenhängen. Mit quadratisch oder kubisch wachsenden Zahlenfolgen kann zudem der Potenzbegriff vorbereitet werden. Die geometrische Darstellung von Dreiecks- und Quadratzahlen ermöglicht deren anschauliche Behandlung; Rechteckzahlen bereiten den Flächeninhalt vor.

Mit der Behandlung der Vorrangregeln erweitern die Schülerinnen und Schüler ihr Repertoire zur Berechnung von Zahlentermen aus der Grundschule um eine weitere Klammerebene sowie um den vorangegangenen Lerninhalt des Potenzierens.

Mit den Rechengesetzen werden die Eigenschaften der Grundrechenarten in den Fokus genommen. Zentral ist dabei die Erkenntnis, dass die Gesetze nicht für beide Arten der Strich- bzw. der Punktrechnung gleichermaßen gelten. Die Gesetze dienen als Erklärungsmuster für Kalküle und bieten Vorteile beim Umformen von Rechenausdrücken. Die Schülerinnen und Schüler verwenden behutsam in zunehmendem Maße Variablen, um die Rechengesetze allgemeingültig zu formulieren und Sachverhalte sowie Problemstellungen allgemein zu beschreiben und mathematisch zu bearbeiten.

Vorrangregeln und Rechengesetze finden ihre Anwendung bei der Behandlung geometrischer und alltäglicher Sachkontexte. Hier rückt neben dem algebraischen Kalkül die Sprache in den Fokus.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Grundrechenarten	
• Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division: ○ Kopfrechnen und Kopfrechenhilfen ○ Halbschriftliche und schriftliche Verfahren ○ Überschlagsrechnung ○ Einschränkungen beim Subtrahieren und Dividieren ○ Unmöglichkeit der Division durch 0	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden die Bezeichner Summe, Differenz, Produkt und Quotient sowie die lateinischen Namen der zugehörigen Rechenglieder, • beschreiben Rechenausdrücke verbal und übersetzen Verbalformulierungen in Rechenausdrücke, • rechnen in den vier Grundrechenarten im Kopf im Zahlbereich bis 500, • verwenden Kopfrechenhilfen wie das Multiplizieren mit oder das Dividieren durch 10, • führen halbschriftliche und schriftliche Algorithmen der Grundrechenarten (maximal zweistellige Divisoren) aus, • lösen Sachaufgaben näherungsweise durch Überschlagsrechnung.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • lösen elementare Gleichungen („Platzhalter-Aufgaben“ mit Variablen) mithilfe von Umkehroperationen, • identifizieren Rechenfehler, z. B. durch Endziffernkontrolle oder durch Überschlagsrechnung, • begründen exemplarisch, dass Subtraktion und Division nur eingeschränkt möglich sind.
Zahlenfolgen • geordnete Aufzählung • Bildungsgesetze (ohne Formalisierung) • Figurierte Zahlen: Quadratzahlen, Dreieckszahlen	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Zahlenfolgen in Tabellen dar, • ermitteln Gesetzmäßigkeiten in Zahlenfolgen, • setzen Zahlenfolgen begründet fort, • erstellen selbst Zahlenfolgen und beschreiben die Bildungsesetze, • veranschaulichen Quadrat- und Dreieckszahlen geometrisch.
Potenzen • Potenz, Basis, Exponent • Definition: Ein Produkt mit gleichen Faktoren heißt Potenz. • Quadratzahlen, Kubikzahlen, Zweierpotenzen, Dreierpotenzen, Zehnerpotenzen • Namen der Zehnerpotenzen bis 10^{12} • Definition der Potenzen a^1 und a^0 für natürliche Basen a	Die Schülerinnen und Schüler • grenzen Potenzieren und Multiplizieren voneinander ab, • berechnen Werte von Potenzen, • nennen die Quadratzahlen bis 20^2 und die Zweierpotenzen bis 2^{10} auswendig, • verwenden bei Potenzen auch Variablen, z. B. 2^k, 10^n oder a^3 und bestimmen deren Wert in einfachen Gleichungen, • legen anhand von Permanenzreihen die Werte von Potenzen mit Exponent 0 oder 1 fest.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Vorrangregeln	

• Bedeutung von Rechenklammern
• <u>Vorrangregeln</u>
  ○ Klammern werden zuerst berechnet.
  ○ Innere Klammern werden vor äußeren Klammern berechnet.
  ○ Potenzieren vor Punktrechnen
  ○ Punktrechnen vor Strichrechnen
  ○ Bei gleicher Rechenart (Punkt- bzw. Strichrechnung) wird von links nach rechts vorgegangen.
	Die Schülerinnen und Schüler
	• berechnen Werte von Zahlentermen mit höchstens zwei Klammerebenen und höchstens sieben Zahlen unter Einhaltung der Vorrangregeln.

Eigenschaften von Addition und Multiplikation	

• Addition
  ○ <u>Kommutativgesetz der Addition:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a + b = b + a$
  ○ <u>Assoziativgesetz der Addition:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  ○ <u>Neutrales Element der Addition:</u> Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a + 0 = a$. 0 wird als das neutrale Element der Addition bezeichnet.
• Multiplikation
  ○ <u>Kommutativgesetz der Multiplikation:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$
  ○ <u>Assoziativgesetz der Multiplikation:</u> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  ○ <u>Neutrales Element der Multiplikation:</u> Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a \cdot 1 = a$ 1 wird als das neutrale Element der Multiplikation bezeichnet.
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen die Kommutativität der Addition und der Multiplikation geometrisch,
	• formulieren die Eigenschaften in Worten, z. B.: „Wenn man in einer Summe Summanden vertauscht, bleibt der Wert der Summe gleich.“,
	• begründen exemplarisch, dass Subtraktion und Division nicht assoziativ sind,
	• begründen exemplarisch, dass das Potenzieren nicht kommutativ,
	• veranschaulichen das Distributivgesetz geometrisch,
	• wenden das Distributivgesetz zum Ausklammern und Ausmultiplizieren an,
	• berechnen Werte von Zahlentermen, in denen 0 und 1 als Teilergebnisse auftreten,
	• verschaffen sich Rechenvorteile durch Nutzen der Eigenschaften,
	• nutzen die Eigenschaften beim Lösen von Sachaufgaben.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
○ Nullproduktsatz: Wenn (mindestens) ein Faktor eines Produktes den Wert 0 hat, dann hat auch das Produkt den Wert 0 (und umgekehrt). • Distributivgesetz: Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Falls $b > c$ ist, gilt auch: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	
Rechenterme • Umgang mit Rechentermen ○ Art eines Rechenterms ○ Wert eines Rechenterms	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben Rechenterme unter Verwendung der Fachbegriffe, • übersetzen Verbalformulierungen in Rechenterme, • bestimmen die Art eines Rechenterms durch Gliederung, • berechnen Werte von Termen und verschaffen sich dabei Rechenvorteile (zusätzlich mit digitalen Rechentrainern möglich), • lösen Zahlenrätsel durch Operationsumkehr (Rückwärtsarbeiten) und machen die Probe, • stellen Terme zu Sachaufgaben, geometrischen Figurierungen und Zahlenrätseln auf (auch unter Verwendung von Variablen) und lösen diese, • lösen Sachaufgaben mithilfe von Rechentermen (auch im Kontext BNE möglich), • formulieren zu einfachen Termen Sachaufgaben.

Basisbegriffe

Assoziativgesetz, Basis, Differenz, Distributivgesetz, Dividend, Divisor, Exponent, Faktor, Klammer, Kommutativgesetz, Minuend, Neutrales Element, Nullproduktsatz, Potenz, Probe, Produkt, Quotient, Subtrahend, Summand, Summe, Term, Wert, Zahl (figuriert)

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Die halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren sind aus der Grundschule bekannt und werden auf größere Zahlen ausgeweitet.
- Das „kleine Einmaleins“ sollte sicher im Kopf beherrscht werden. Auch zehnernahe Multiplikationen wie beispielsweise $8 \cdot 12$ oder $4 \cdot 21$ sollten durch Anwendung des Distributivgesetzes im Kopf berechnet werden.
- Die aus der Grundschule bekannten „Platzhalter-Aufgaben“ ermöglichen einen behutsamen Zugang zum Variablenbegriff und dem Lösen von elementaren Gleichungen durch Operationsumkehr.
- Dennoch sollen Variablen im gesamten Themenfeld sparsam eingesetzt werden. Der Schwerpunkt liegt nicht auf dem kalkülhaften Arbeiten mit Variablen.
- Die Darstellung von Zahlenfolgen in Tabellenform dient der Vorbereitung des Denkens in funktionalen Zusammenhängen.
- Auch mit exponentiell wachsenden Zahlenfolgen kann der Potenzbegriff vorbereitet werden.
- Das Lösen von Gleichungen im Kontext der Potenzen bezieht sich auf einfache Gleichungen wie beispielsweise $2^k = 8$, die leicht im Kopf gelöst werden können. Auch anhand solcher Gleichungen kann der Platzhalteraspekt von Variablen eingeübt werden.
- „Klammergebirge“ können als Strukturierungshilfe bei Vorrangregeln dienen.
- Bei Zwischenrechnungen ist auf eine korrekte algebraische Verwendung des Gleichheitszeichens zu achten.
- Das Kommutativgesetz der Multiplikation kann geometrisch anhand von Rechteckzahlen veranschaulicht werden.
- Die Schülerinnen und Schüler sollten auf die Internationalität mathematischer Symbole hingewiesen werden, aber auch auf die Problematik des im angelsächsischen Raum verwendeten „Mal-Kreuzes“.
- Als „Forscheraufgaben“ eignen sich beispielsweise das Erstellen magischer Quadrate, das Arbeiten mit Zahlenmauern (Erkunden und Ergänzen) oder das Verfassen von Zahlenrätseln.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
    - Abschätzung über Zehnerpotenzen: Wie lange dauert es beispielsweise, bis der Berg an verbrauchten Joghurtbechern der Klasse (der Familie, der Schule) aufeinandergestapelt von der Erde bis zum Mond reicht?

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitale Rechentrainer

Fakultative Inhalte

- *Begründung durch Figurierung, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ist.*
- *Begründung durch Figurierung, dass die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen eine Quadratzahl ist.*

Vorschläge und Hinweise

- *Erläuterung, dass der Wert der Potenz* 0^0 *durch Permanenzreihen nicht eindeutig bestimmt ist.*
- *Fibonacci-Folge*
- *Plusklammerregel bei der Behandlung des Assoziativgesetzes der Addition*
- *Minusklammerregel unter Beachtung der eingeführten Zahlenmenge IN*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit Brüchen
- Klassenstufe 7: Zuordnungen
- Klassenstufe 8: Terme

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Schätzen bei Sachaufgaben aus dem Alltag (Fermi-Aufgaben)
- Adam Ries (1492 – 1559)

Das aus der Grundschule und dem Alltag vorhandene Wissen der Schülerinnen und Schüler wird systematisiert und erweitert. Sie erkennen in Größen das Hilfsmittel, reale Gegebenheiten mathematisch zu beschreiben. Das Grundprinzip des Messens wird dadurch konkretisiert, dass man Vielfache und Anteile einer geeignet gewählten Grundeinheit bestimmt. Dabei erfahren sie die Notwendigkeit, eine Grundeinheit festzulegen und unterscheiden Maßzahl und Maßeinheit.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Größen	
• Länge mit der Grundeinheit 1 m • Masse mit der Grundeinheit 1 kg • Zeit mit der Grundeinheit 1 s Geldwert mit der Grundeinheit 1 €	Die Schülerinnen und Schüler • begründen, dass die Einheit einer Größe willkürlich gewählt werden kann und dass es zweckmäßig ist, eine allgemein verbindliche Einheit zu vereinbaren, • geben die historische Festlegung von Einheiten exemplarisch für die Länge an, unterscheiden zwischen Zeitpunkten und Zeitspannen.
Messen von Größen	
Maßzahl und Maßeinheit	Die Schülerinnen und Schüler • unterscheiden zwischen Größe, Maßzahl und Maßeinheit, • nutzen das Grundprinzip des Messens als Vergleichen mit (Standard-)Einheiten, • schätzen Größen in Alltagssituationen, messen eine Größe.
Einheiten und Umrechnungen	
• Bedeutung und Abkürzungen der Vorsilben Mikro-, Milli-, Zenti-, Dezi-, sowie Deka-, Hekto-, Kilo-, Mega-, Giga- • Ober- und Untereinheiten der ○ Längeneinheit 1 m: 1 µm, 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 km ○ Masseneinheit 1 kg: 1 µg, 1 mg, 1 g, 1 t Zeiteinheit 1 s: 1 ms, 1 min, 1 h, 1 d	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Zusammenhänge zwischen den Ober- und Untereinheiten und der jeweiligen Grundeinheit her, z. B. 1 km = 1000 m, 1 t = 1000 kg, 1 h = 3600 s, • erläutern den Begriff Umrechnungsfaktor.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• Schreibweisen für Größenangaben:
  ○ natürliche Maßzahlen
  ○ gemischte Schreibweise
  ○ Kommaschreibweise
• Ordnen von Größenwerten
	Die Schülerinnen und Schüler
	• rechnen einen vorgegebenen Wert in eine Unter- bzw. eine Obereinheit um, z. B. 3,09 m = 309 cm; 89 min = 1 h 29 min,
	• ordnen Listen von bis zu vier Größenangaben und stellen dazu ggf. dieselbe Einheit her.

Rechnen mit Größen	
• Addieren und Subtrahieren von Größenwerten • Multiplikation einer Größe mit einer Zahl • Division einer Größe durch eine Zahl (Verteilen) • Division einer Größe durch eine Größe derselben Einheit (Messen)	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen den Wert von Rechenausdrücken mit bis zu vier Größenangaben und wandeln dazu ggf. in dieselbe Einheit mit natürlichen Maßzahlen um, • berechnen Zeitspanne, Anfangs- oder Endzeitpunkt, wenn die beiden anderen Angaben bekannt sind, • übersetzen Sachsituationen gegebenenfalls in aussagekräftige Skizzen, • unterscheiden die Division einer Größe durch eine Zahl von der Division einer Größe durch eine Größe derselben Einheit, • lösen Sachaufgaben (auch im Kontext BNE).

Basisbegriffe

Einheit (Grund-, Maß-, Ober-, Unter-), Größe, Maßzahl, Umrechnung, Umrechnungsfaktor, Zeit(-punkt, -spanne)

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Das Umwandeln von Einheiten sollte mit Hilfe von Einheitentafeln erarbeitet werden, um ein vertieftes Verständnis hinsichtlich der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Einheiten zu erlangen. Bei der weiteren Arbeit können Einheitentafeln oder Kommaverschiebungsregeln eingesetzt werden.
- Beim Umwandeln von Einheiten genügen – unabhängig von der Art des Vorgehens – Kommaverschiebungen um maximal 3 Stellen.
- Bei der Kommaschreibweise genügt eine Betrachtung von maximal drei Nachkommastellen.

Vorschläge und Hinweise

- Das Lösen von Sachaufgaben beinhaltet das Entnehmen von relevanten Informationen aus Diagrammen und Texten, eine Plausibilitätsprüfung des Ergebnisses durch eine Überschlagsrechnung sowie die Formulierung eines Antwortsatzes, der am Sachzusammenhang orientiert ist. Dabei sollten sinnvolle Einheiten verwendet und sachgerecht gerundet werden.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Abschätzungen zur Länge der Schlange aller Autos der eigenen Stadt in Bezug zur Entfernung zwischen Saarbrücken und Merzig (Trier, Berlin) oder Abschätzungen zu den Längen von Autoschlangen im Ländervergleich bei Ländern mit ähnlicher Einwohnerzahl (beispielsweise ein europäisches Land im Vergleich mit einem Entwicklungsland).

    Internetrecherche zur Länge von Transportwegen (beispielsweise bei Lebensmitteln).

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Tablet als digitales Messgerät

  Internetrecherche zu historischen oder internationalen Einheiten

Fakultative Inhalte

- *Speicherplatz in einem digitalen Speicher mit der Grundeinheit 1 Byte = 1 B und den Obereinheiten 1 kB, 1 MB, 1 GB und 1 TB.*

  Bruchteile von Größenwerten im Alltag (beispielsweise ein halber Kilometer, eine Viertelstunde)

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Natürliche Zahlen (Stellenwertsysteme)
- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit natürlichen Zahlen
- Klassenstufen 5/6: Flächen- und Rauminhalte
- Klassenstufen 5/6: Statistische Daten

  Klassenstufen 5/6: Brüche

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Physikalisch-technische Bundesanstalt in Braunschweig als Hüterin der Einheiten in Deutschland
- historische Einheiten wie z. B. Elle, Zentner

  Einheiten im angelsächsischen Raum wie z. B. Meile (mile), Fuß (foot), Fass (barrel)

4. Figuren und Körper	Mathematik 5/6

Durch das Untersuchen konkreter Gegenstände aus ihrem Erfahrungsbereich lernen die Schülerinnen und Schüler die geometrischen Begriffe Punkt, Strecke, Strahl und Gerade sowie die Beziehungen „senkrecht" und „parallel" als Idealisierungen und Modellierungen der Wirklichkeit kennen.

Der allgemein gebräuchliche Abstandsbegriff wird mithilfe des Extremalprinzips mathematisch gefasst. Durch die neuen Begriffe können die Schülerinnen und Schüler ebene Figuren – speziell besondere Vierecke - erkennen, unterscheiden und exakt beschreiben.

Das konkrete Arbeiten mit Alltagsgegenständen und mit Modellen ermöglicht eine anschauliche Erfassung der dritten Dimension, die für viele Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung darstellt. Diese liegt in inhaltlichen und begrifflichen Analogien, aber auch in Neuerungen zu den ebenen Figuren – verbunden mit dem Wunsch nach einer zweidimensionalen Darstellung von Körpern. Zeichnerische Darstellungen korrespondieren mit manuellen Erfahrungen beim Basteln und Arbeiten mit Modellen.

Die zeichnerischen und konstruktiven Fertigkeiten bei der Handhabung von Lineal und Geodreieck werden weiterentwickelt und gefestigt. Auf sauberes und genaues Arbeiten ist zu achten. Eine wichtige Ergänzung stellen dynamische Geometriesysteme (DGS) dar, die durch ihre Möglichkeiten der Veranschaulichung von Sachverhalten und des entdeckenden Lernens in besonderer Weise zum eigenständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler anregen. Formale Schreibweisen sollten sparsam eingesetzt werden.

<table>
<tr><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th></tr>
<tr><td>

Geometrische Grundobjekte

- Koordinatensystem:
  - Ursprung O
  - x- und y-Achse
  - x- und y-Koordinate
- Punkte als geometrische Grundobjekte
  - Symbole $A, B, C, \ldots, P, Q, R, \ldots$ (lateinische Großbuchstaben)
- Strecke:
  - als geradlinige Verbindung zweier Punkte
  - als kürzeste Verbindung zweier Punkte
  - als unendliche Punktmenge
  - Symbole:
    - $\overline{PQ}$ für die Strecke mit den Endpunkten P und Q
    - $|\overline{PQ}|$ für die Länge von $\overline{PQ}$
    - $a, b, c, \ldots$ (lateinische Kleinbuchstaben) für Strecken und für Streckenlängen.

</td><td>

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden mathematische Symbolik für Punkte, Strecken und Streckenlängen sowie Geraden,
- geben die Koordinaten von Punkten im Koordinatensystem an,
- zeichnen Punkte mit gegebenen Koordinaten im Koordinatensystem ein,
- zeichnen Strecken und messen deren Längen mit Lineal oder Geodreieck,
- geben an, dass eine Gerade durch die Angabe zweier zugehöriger Punkte eindeutig festgelegt ist,
- zeichnen Geraden und Halbgeraden mit Lineal oder Geodreieck,
- ermitteln zeichnerisch, ob Punkte auf vorgegebenen Geraden liegen, z. B. bestimmte Orte auf einer Landkarte.

</td></tr>
</table>

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Geraden ○ als beidseitig unbegrenzte gerade Linien ○ Symbole $g, h, k, \ldots$ (lateinische Kleinbuchstaben) bzw. g_{AB} oder AB für die Gerade durch die Punkte A und B ○ Grundaussage: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte eindeutig festgelegt. • Halbgeraden bzw. Strahlen	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden die Bezeichnung Element und die Symbole $\in$ und $\notin$, um die Lage eines Punktes bezüglich einer Strecke oder einer Geraden formal wiederzugeben, • geben die Koordinaten besonderer Punkte an (z.B. Eckpunkte von Figuren, Mittelpunkte oder Schnittpunkte von Strecken), • zeichnen Figuren mit vorgegebenen Eigenschaften (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge).
Lagebeziehungen • <u>Bezeichnung</u>: Die Grund- und die Mittellinie des Geodreiecks bilden einen rechten Winkel. • <u>Definition</u>: Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht, wenn sie sich so schneiden, dass ein rechter Winkel entsteht. • <u>Definition</u>: Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn sie eine gemeinsame Senkrechte haben. • Symbole $\perp$ und $\parallel$ für senkrecht bzw. parallel • Existenz und Eindeutigkeit von Schnittpunkten zweier nichtparalleler Geraden (in der Ebene) • Lot von einem Punkt auf eine Gerade als senkrechte Verbindungsstrecke	Die Schülerinnen und Schüler • stellen durch zweimaliges Falten des Zeichenblattes zwei Geraden her, die sich so schneiden, dass ein rechter Winkel entsteht, • benennen in ihrer Umwelt zueinander senkrechte und parallele gerade Linien, • zeichnen zueinander senkrechte und parallele Geraden mit Hilfe eines Geodreiecks (auch im Koordinatensystem), • prüfen mit Hilfe eines Geodreiecks, ob Geraden zueinander senkrecht oder parallel sind, • zeichnen die Senkrechte zu einer Geraden durch einen Punkt auf bzw. außerhalb der Geraden mithilfe des Geodreiecks sowie mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, • zeichnen die Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb der Geraden mithilfe des Geodreiecks, indem sie als Hilfslinie eine Senkrechte zeichnen, auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, • beschreiben das Vorgehen zum Zeichnen von Senkrechten und Parallelen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Lagebeziehungen von Geraden im Koordinatensystem und bestimmen Koordinaten von Schnittpunkten, • geben an, dass zwei verschiedene Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben.
Abstände • Der Abstand zweier Punkte ist die Länge ihrer Verbindungsstrecke. • Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Länge des Lotes. • Der Abstand zweier paralleler Geraden ist der Abstand eines Punktes der einen Geraden von der anderen Geraden.	Die Schülerinnen und Schüler • messen Abstände von Punkten (auch im Koordinatensystem) mit Hilfe eines Lineals oder Geodreiecks, • bestimmen (näherungsweise) Abstände von Orten mithilfe von Landkarten, • messen den Abstand eines Punktes von einer Geraden, auch in Sachzusammenhängen, • bestimmen die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen vorgegebenen Abstand haben.

Besondere Vierecke
• Besondere Vierecke:
  ○ Trapez
  ○ Parallelogramm
  ○ Raute
  ○ Rechteck
  ○ Quadrat
• Fachbegriffe:
  ○ Ecke
  ○ Seite
  ○ Diagonale
	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren die besonderen Vierecke in ihrer Umwelt und im Koordinatensystem,
	• verwenden die Fachbegriffe bei der Beschreibung von Vierecken,
	• vergleichen die besonderen Vierecke anhand gemeinsamer und unterschiedlicher Eigenschaften.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Rechteck

- Definition: Ein Viereck, dessen benachbarte Seiten jeweils senkrecht aufeinander stehen, heißt Rechteck.
  - Eigenschaften des Rechtecks:
    - Die gegenüber liegenden Seiten sind zueinander parallel und gleich lang.
    - Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang und halbieren einander.
- Definition: Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt Quadrat.

Die Schülerinnen und Schüler

- zeichnen Rechtecke und Quadrate mit vorgegebenen Seitenlängen mit Hilfe eines Geodreiecks,
- beschreiben das Vorgehen beim Zeichnen von Rechtecken und Quadraten,
- erforschen die Eigenschaften des Rechtecks,
- zeichnen Rechtecke und Quadrate auch in Koordinatensystemen und geben die Koordinaten der Eckpunkte an (zusätzlich mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge möglich),
- begründen, dass jedes Quadrat ein Rechteck ist, aber nicht jedes Rechteck ein Quadrat ist.

Elementare Körper

- Einfache Polyeder
  - Quader, Würfel
  - Prisma
  - Pyramide
- Einfache Körper mit gekrümmten Flächen
  - Zylinder
  - Kegel
  - Kugel
- Grundbegriffe
  - Ecke, Kante, Fläche
  - Seitenfläche, Grundfläche, Mantel, Oberfläche
  - Raumdiagonalen, Flächendiagonalen
  - Netz (von Polyedern)

Die Schülerinnen und Schüler

- ordnen Gegenstände des Alltags und Grundkörper einander zu,
- unterscheiden Polyeder von Körpern, die von gekrümmten Flächen begrenzt sind,
- bauen Kantenmodelle von Polyedern,
- verwenden die Fachbegriffe bei der Beschreibung von Körpern,
- beschreiben bei Polyedern die begrenzenden Flächen, deren Anzahlen und Deckungsgleichheiten,
- vergleichen Körper anhand gemeinsamer und unterschiedlicher Eigenschaften,
- zeichnen Netze von Quadern, Prismen und Pyramiden und bauen damit Flächenmodelle.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Quader
 	
• Definition: Ein Körper, der von genau sechs Rechtecken begrenzt wird, heißt Quader.
  ○ Eigenschaften des Quaders
    - in jeder Ecke stoßen drei Kanten (paarweise) senkrecht aufeinander
    - gegenüberliegende Rechtecke sind parallel und deckungsgleich
    - jeweils vier Kanten sind parallel und gleich lang
• Schrägbilder von Quadern
• Definition: Ein Quader, dessen begrenzende Flächen Quadrate sind, heißt Würfel.
	Die Schülerinnen und Schüler
	• zeichnen unterschiedliche Netze desselben Quaders.
	• identifizieren in Quadernetzen aufeinander fallende Ecken und Kanten,
	• zeichnen Schrägbilder von Quadern vorgegebener Kantenlängen (zusätzlich mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge möglich),
	• ermitteln die elf unterschiedlichen Netze von Würfeln,
	• begründen, dass jeder Würfel ein Quader ist, aber nicht jeder Quader ein Würfel ist.

Basisbegriffe

Abstand, Figur, Gerade (Halb-), Kegel, Körper, Koordinaten (-achse, -system), Kugel, Lot, Netz, parallel, Parallelogramm, Prisma, Punkt, Pyramide, Quader, Quadrat, Raute, Rechteck, Schrägbild, senkrecht, Strahl, Strecke, Trapez, Ursprung, Würfel, Zylinder

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Die mathematischen Symbole für Punkte, Strecken und Streckenlängen sowie Geraden sollte behutsam eingeführt und sparsam eingesetzt werden. Gleiches gilt für weitere formale Schreibweisen und den Gebrauch der Mengensprache.
- Der rechte Winkel wird über die besondere gegenseitige Lage von Grund- und Mittellinie des Geodreiecks eingeführt. Die Definition des Winkelbegriffs erfolgt in Klassenstufe 6.
- Begriffe und Beziehungen sollten handlungsorientiert durch selbstständiges Untersuchen von Objekten aus der Erfahrungswelt und dem Alltag erarbeitet werden.
- Beispiele für Materialien, die handlungsorientierte Zugänge ermöglichen, sind Geobretter, Papier (Erstellen von zueinander senkrechten und parallelen Linien durch Faltungen), Bausysteme für geometrische Körper und selbstgebaute Modelle, Holzwürfel und Mosaiksteine.
- Die Definitionen sollen die aus der Anschauung gewonnenen Erfahrungen verbindlich mit den entsprechenden Fachbegriffen versprachlichen. Sie dienen als Sachgrundlage für die weitere Kommunikation und vermitteln Klarheit über die Begriffe. Vor der Verschriftlichung steht jedoch das Verstehen der Begriffe.

Vorschläge und Hinweise

- Das Zeichnen paralleler Geraden sollte zunächst in Anlehnung an die Definition mit Hilfe der Senkrechten erfolgen. Bei der weiteren Arbeit können die Hilfslinien auf dem Geodreieck verwendet werden.
- Das Bestimmen von Abständen von Orten mithilfe von Landkarten kann in der Regel nur näherungsweise erfolgen. Es empfiehlt sich, den gemessenen Abstand zweier Punkte auf der Karte so zu runden, dass sich eine natürliche Maßzahl ergibt. Zur Berechnung des Abstands in der Realität ist das Zweisatz-Verfahren geeignet. Das Rechenergebnis muss entsprechend validiert werden.
- Beim Aufbau einer flexiblen Raumanschauung ist die Arbeit mit konkreten Materialien unabdingbar. Das Basteln von Kantenmodellen und das Zeichnen von Körpernetzen, die anschließend ausgeschnitten und aufgeklappt werden, ermöglichen die Verbindung von räumlicher Erfahrung und mentalem Operieren im Raum.
- Bei der Beschreibung von Körpern werden nur gerade Prismen, gerade Zylinder, regelmäßige Pyramiden und gerade Kegel betrachtet.
- Bei Schrägbildern bewährt sich die Kavalierprojektion mit Parallelen zu den Rechenkästchendiagonalen. Als Einheit für die dritte Dimension empfiehlt sich die Länge der Rechenkästchendiagonalen.
- Weitere Materialien können auch mittels 3D-Drucker selbst hergestellt werden.
- Als „Forscheraufgaben“ eignen sich beispielsweise das Erstellen einer Schatzkarte samt einer geometrischen Lagebeschreibung des Schatzes oder Parkettierungsprobleme.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- dynamische Geometriesoftware: Sammeln von ersten Erfahrungen mit Dynamischer Geometriesoftware und Bekanntmachen mit der Handhabung des eingesetzten Programms
- 3D-Geometriesoftware zur Untersuchung von Körpern, die nicht als Modell vorliegen

Fakultative Inhalte

- *optische Täuschungen*
- *Beschreiben von Punktmengen durch Beziehungen zwischen den Koordinaten*
- *Erforschen der maximalen Anzahl von Schnittpunkten bei endlich vielen Geraden*
- *Parkettierungen*
- *Platonische Körper*
- *Eulersche Polyederformel* $e + f = k + 2$
- *Nichtabwickelbarkeit der Kugeloberfläche*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Größen
- Klassenstufen 5/6: Flächeninhalt und Volumen
- Klassenstufen 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie

Vorschläge und Hinweise

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Maßstäbe von Landkarten
- Strahlenmodell des Lichts in der Optik
- Projektionen der Erdoberfläche bei Landkarten
- perspektivische Darstellungen in Gemälden, insbesondere als Kontrastierung zu den Schrägbildern
- Leonhard Euler (1707-1783)

In diesem Themenfeld werden die Kenntnisse von Größen um den Flächen- und den Rauminhalt erweitert. Damit erschließen sich wichtige Anwendungsbereiche der Mathematik.

Einen ersten Kontakt mit diesen Größen haben die Schülerinnen und Schüler bereits in der Primarstufe geknüpft. Dennoch sollten die Schwierigkeiten, die bei der Arbeit mit den Größen Flächeninhalt und Volumen auftreten können, nicht unterschätzt werden. Das konkrete Arbeiten mit händischen Materialien erleichtert den Schülerinnen und Schülern auch hier den Zugang zur neuen Thematik.

Die Sachaufgaben zum Thema Flächeninhalt, Umfang und Volumen bieten einen sinnvollen Kontext zur propädeutischen Behandlung von Gleichungen, deren systematische Behandlung jedoch erst in der Klassenstufe 7 vorgesehen ist, wenn die Grundvorstellungen über Gleichheitszeichen, Gleichungen und Äquivalenzumformungen angemessen zur Verfügung stehen.

In wirklichkeitsnahen Aufgaben sind die Schülerinnen und Schüler gefordert, die verschiedenen Mittel flexibel einzusetzen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	**Prozessbezogene Kompetenzen**
Flächeninhalt und Umfang des Rechtecks	

• Flächeninhalt, Symbol A
  ○ Additivität des Flächeninhalts
• Festlegung: Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 m hat den Flächeninhalt 1 Quadratmeter (1 m²).
  ○ Untereinheiten der Einheit 1 m²: 1 dm², 1 cm² und 1 mm²
  ○ Obereinheiten der Einheit 1 m²: 1 a, 1 ha und 1 km²
  ○ Umrechnungsfaktor 100 Kommaverschiebung um 2 Stellen
  ○ dezimale Schreibweise bei der Angabe von Maßzahlen
• Satz: Das Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat den Flächeninhalt A mit $A = a \cdot b$.
• Satz: Das Quadrat mit der Seitenlänge a hat den Flächeninhalt A mit $A = a \cdot a = a^2$
	Die Schülerinnen und Schüler
	• erläutern die Begriffe Umfang und Flächeninhalt,
	• ergänzen und zerlegen Flächenstücke zum Vergleich von Flächeninhalten,
	• vergleichen Flächeninhalte von Figuren durch Auslegen mit Quadraten und Auszählen,
	• nennen Beispiele aus ihrer Umwelt für Flächeninhalte, die die Größenordnung der Einheitsflächen haben,
	• schätzen den Inhalt von Flächen in ihrer Umwelt,
	• rechnen Flächeneinheiten um,
	• verwenden sinnvolle Einheiten bei der Angabe von Flächeninhalten,
	• erläutern die Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks mithilfe von Einheitsquadraten,
	• bestimmen den Umfang von Vielecken,
	• berechnen den Flächeninhalt von Rechtecken und von Flächen, die sich in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke zerlegen lassen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Umfang: ○ eines Vielecks als Summe der Längen seiner Seiten. ○ eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b: $U = a + b + a + b$ $= 2 \cdot a + 2 \cdot b$ $= 2 \cdot (a + b)$ ○ eines Quadrats mit der Seitenlänge a: $U = 4 \cdot a$ • Variation von Flächeninhalt und Umfang bei Rechtecken ○ <u>Satz</u>: Unter allen Rechtecken mit gegebenem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang. ○ <u>Satz</u>: Unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen näherungsweise den Inhalt rechteckiger Flächen aus dem Alltag durch Messen der Seitenlängen, • zeichnen Rechtecke mit vorgegebenem Flächeninhalt, • berechnen aus dem Flächeninhalt und der Angabe einer Seitenlänge die fehlende Seitenlänge, • berechnen bei einem Quadrat aus dem Umfang die fehlende Seitenlänge, • lösen und erfinden Sachaufgaben zum Thema Flächeninhalt und Umfang (auch im Kontext BNE möglich), • beschreiben die Änderungen des Flächeninhaltes von Rechtecken bei Änderungen von Seitenlängen, • bestimmen bei gegebenem Umfang das Rechteck mit dem größten Inhalt, • bestimmen in geeigneten Fällen bei gegebenem Flächeninhalt das Rechteck mit dem kleinsten Umfang.
Rauminhalt und Oberflächeninhalt des Quaders • Raum und Rauminhalt (Volumen, Symbol V) ○ Additivität des Rauminhaltes • <u>Festlegung</u>: Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m hat das Volumen 1 Kubikmeter (1 m^3). ○ Untereinheiten der Einheit 1 m^3: 1 dm^3, 1 cm^3, 1 mm^3 ○ Obereinheit der Einheit 1 m^3: 1 km^3 ○ Umrechnungsfaktor 1000, Kommaverschiebung um 3 Stellen ○ dezimale Schreibweise bei der Angabe von Maßzahlen • Weitere Volumeneinheiten: 1 l = 1 dm^3 ○ Untereinheiten: 1 dl, 1 cl, 1 ml ○ Obereinheit: 1 hl	Die Schülerinnen und Schüler • ergänzen und zerlegen Körper zum Vergleich von Rauminhalten, • bestimmen Rauminhalte von Körpern durch Ausfüllen mit Würfeln und Auszählen oder durch Umfüllen, • nennen Beispiele aus ihrer Umwelt für Körper, die näherungsweise das Volumen der Einheitskörper haben, • schätzen den Rauminhalt von Körpern in ihrer Umwelt, • rechnen Raumeinheiten um, • verwenden sinnvolle Einheiten bei der Angabe von Rauminhalten, • erläutern die Herleitung der Formel für den Rauminhalt eines Quaders mithilfe von Einheitswürfeln.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
• Satz: Der Quader mit den Kantenlängen a, b und c hat das Volumen V mit $V = a \cdot b \cdot c$ • Rauminhalt eines Quaders als Produkt von Grundflächeninhalt und Höhe: $V = G \cdot c$ • Satz: Der Würfel mit der Kantenlänge a hat das Volumen V mit $V = a^3$. • Oberflächeninhalt des Quaders als Summe der Flächeninhalte seiner Seitenflächen $O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$ $= 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ • Oberflächeninhalt des Würfels mit der Kantenlänge a $O = 6 \cdot a^2$ • Nichtadditivität des Oberflächeninhaltes beim Zusammensetzen von Körpern	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt von Quadern und von Körpern, die sich in Quader zerlegen oder zu Quadern ergänzen lassen, • bestimmen näherungsweise den Rauminhalt quaderförmiger Körper aus dem Alltag mittels Messen der Kantenlängen, • berechnen aus dem Rauminhalt und dem Grundflächeninhalt die Höhe sowie aus dem Rauminhalt und der Höhe den Grundflächeninhalt, • beschreiben die Änderungen des Rauminhaltes bei Änderungen von Kantenlängen, • berechnen bei Würfeln aus dem Oberflächeninhalt die Kantenlänge, • bearbeiten und erfinden Sachaufgaben zum Thema Rauminhalt und Oberflächeninhalt (auch im Kontext BNE möglich), • erläutern die Nichtadditivität des Oberflächeninhaltes.

Basisbegriffe

Fläche (Grund-, Seiten-), Flächeninhalt, Höhe, Kubikmeter, Kante, Kantenlänge, Liter, Oberflächeninhalt, Quadratmeter, Seite, Seitenlänge, Umfang, Volumen (Rauminhalt)

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- In der Raumgeometrie, aber auch in der ebenen Geometrie ist die Arbeit mit konkreten Materialien unabdingbar, um die Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, später auch mental mit den geometrischen Objekten zu operieren.
- Beispiele für Materialien, die handlungsorientierte Zugänge ermöglichen, sind Geobretter, quadratische Mosaiksteine und kariertes Papier für Problemstellungen im Zweidimensionalen sowie Holzwürfel, Bausysteme für Flächenmodelle von Körpern und Füllkörper zur Erfassung von Volumen und Oberflächeninhalt.
- Rechtwinklige Dreiecke sollen nicht als eigenständiges Thema behandelt werden, sondern nur im Kontext der Zerlegungen.
- Vor der systematischen Behandlung der Dezimalbrüche ist deren Verwendung bei Einheiten propädeutisch und sollte deshalb vorwiegend in gut überschaubaren, alltagsnahen Beispielen auftauchen.

Vorschläge und Hinweise

- Weitere Materialien können auch mittels 3D-Drucker selbst hergestellt werden.
- Als „Forscheraufgabe“ eignet sich beispielsweise das Ausmessen des Schulgeländes.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Messung und Hochrechnung zum eigenen Wasserverbrauch (z. B. beim Duschen)
  - Hochrechnung zur „Wasserverschwendung“ bei tropfenden Wasserhähnen
  - Hochrechnung zur Reduktion von „Müllbergen“ (z. B. Wie viel Müll könnten wir in der Schule einsparen, wenn jedes Mitglied der Schulgemeinschaft Mehrwegverpackungen statt Wegwerf-Verpackungen verwendet?)

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- dynamische Geometriesoftware: Untersuchungen von funktionalen Zusammenhängen an ebenen Figuren und geometrischen Körpern (z. B. zwischen Seitenlängen und Umfang bzw. Flächeninhalt bei Rechtecken oder zwischen Kantenlängen und Oberflächeninhalt bzw. Volumen bei Quadern)
- 3D-Geometriesoftware zur Untersuchung von Körpern, die nicht als Modell vorliegen

Fakultative Inhalte

- *Umfang und Flächeninhalt des Kreises (Messen mit dem Maßband bzw. „Kuchenmethode“)*
- *Symmetrieeigenschaften des Quaders*
- *Würfel als Quader mit extremalen Eigenschaften*
- *Zerlegung eines Quaders in zwei gerade Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Größen
- Klassenstufen 5/6: Figuren und Körper
- Klassenstufe 7: Gleichungen
- Klassenstufe 8: Vielecke und Prismen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Maße von Spielfeldern im Sport
- Flächeninhalte von Stadtgebieten, Ländern und Kontinenten
- Bedeutung von Volumen und Oberfläche für den Energiehaushalt von Lebewesen (z. B. Eisbär) und bei Gebäuden; Verdunstung

6. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen — Mathematik 5/6

Teilbarkeitsprobleme treten in vielen Bereichen der Alltagswelt auf. Sie sind Ausgangspunkt der mathematischen Untersuchungen zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen, wodurch das Verständnis über die Struktur dieses Zahlbereichs gefestigt und erweitert wird. Gleichzeitig werden wichtige Grundlagen für das spätere Rechnen mit Brüchen gelegt.

Den Schülerinnen und Schülern wird die zentrale Rolle der Primzahlen beim Aufbau der natürlichen Zahlen bewusst. Diese bestimmen die Teilerstruktur und alle davon abhängigen Begriffe wie größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches. Zu deren Bestimmung wird bei großen Zahlen die Primfaktorzerlegung angewendet.

Bei der Behandlung der Teilbarkeitskriterien gewinnen die Schülerinnen und Schüler einen Einblick in das Begründen und Beweisen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Teiler und Vielfache	
• Teiler und Teilermengen • Bezeichnung: Eine natürliche Zahl a nennt man Teiler der natürlichen Zahl b, wenn b ohne Rest durch a dividiert werden kann. • Symbol | für „teilt“ bzw. „ist Teiler von“ • Vielfache und Vielfachenmengen	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern die Begriffe Teiler und Vielfache einer natürlichen Zahl, • bestimmen Teiler und Vielfache einer natürlichen Zahl, • bestimmen Teilermengen (auch mithilfe von Ergänzungsteilern) und Vielfachenmengen, • geben die Teiler- und Vielfachenmenge der Zahl Null an.
Teilbarkeit von Summen	
• Teilbarkeit von Summen: Wenn alle Summanden einer Summe durch eine Zahl teilbar sind, dann ist die Summe durch diese Zahl teilbar. • Nichtteilbarkeit von Summen: Wenn die Summanden einer Summe bis auf genau einen Summanden durch eine Zahl teilbar sind, dann ist die Summe durch diese Zahl nicht teilbar. • Aussagenwerte: wahr (w) oder falsch (f)	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern die Teilbarkeitsregel für Summen anhand geometrischer Darstellungen, • wenden die Teilbarkeitsregel für Summen an, • geben an, dass eine Aussage durch die Angabe eines Gegenbeispiels widerlegt werden kann, • belegen exemplarisch, dass die Kehraussage der Teilbarkeitsregel für Summen falsch ist, • zerlegen Zahlen geeignet in Summen, um eine Nichtteilbarkeit nachzuweisen.

6. Teilbarkeit der natürlichen Zahlen — Mathematik 5/6

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Endstellen- und Quersummenregeln
 	
• Kriterien zur Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit durch 2, 3, 5, 9 und 10, z. B.:
  ○ Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selbst durch 9 teilbar (und umgekehrt)
  ○ Wenn die Endziffer einer Zahl 0 oder 5 ist, dann ist die Zahl durch 5 teilbar (und umgekehrt)
	Die Schülerinnen und Schüler
	• wenden die Kriterien zur Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit an,
	• begründen exemplarisch die Quersummenregel für 3 oder für 9,
	• erstellen begründet auf den elementaren Teilbarkeitsregeln weitere Regeln zur Teilbarkeit, z.B. durch 6 und durch 15.

Primzahlen • <u>Definition:</u> Eine natürliche Zahl p mit genau zwei Teilern heißt Primzahl. • Begriff des Primteilers • Primfaktorzerlegung und deren Eindeutigkeit • Unbegrenztheit der Primzahlenmenge	Die Schülerinnen und Schüler • begründen, dass jede Zahl außer 1 mindestens zwei verschiedene Teiler hat, • begründen, dass 1 keine Primzahl ist, • wenden das Sieb des Eratosthenes zum Auffinden der Primzahlen an und erläutern das algorithmische Vorgehen, • bestimmen die Primzahlen bis 100, • weisen exemplarisch nach, dass die Primfaktorzerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist, • zerlegen Zahlen bis 500 in Primfaktoren, • untersuchen, ob eine gegebene Zahl bis 500 eine Primzahl ist.
Gemeinsame Teiler und Vielfache • gemeinsamer Teiler 1 • größter gemeinsamer Teiler (ggT) zweier Zahlen • <u>Bezeichnung</u>: Zwei natürliche Zahlen a und b heißen teilerfremd, wenn $\mathrm{ggT}(a; b) = 1$ ist. • gemeinsame Vielfache • kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen mithilfe von Teiler- bzw. Vielfachenmengen die gemeinsamen Teiler bzw. gemeinsamen Vielfachen zweier natürlicher Zahlen, • erläutern, weshalb die Ausdrücke „kgT“ und „ggV“ unsinnig sind, • bestimmen mittels Primfaktorzerlegung den ggT bzw. das kgV zweier Zahlen bis 500, • lösen Sachaufgaben zu ggT und kgV.

Basisbegriffe

ggT, kgV, Primfaktor (-zerlegung), Primzahl, Quersumme, Teiler (Ergänzungs-, Prim-), Teilermenge, Vielfachenmenge, Vielfaches

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Der Begriff „Vielfache einer Zahl“ kann verbal umschrieben eingeführt werden (z. B. „Multipliziert man eine Zahl nacheinander mit 1, 2, 3, 4, …, so erhält man ihre Vielfachen.“)
- Die geometrische Darstellung der Teilbarkeitsregeln kann durch Plättchenmuster oder Rechteckstreifen erfolgen.
- Die Begründungen der Teilbarkeitsregeln erfolgen anhand von Umformungen einfacher Zahlenterme.
- Das Sieb des Eratosthenes wird vorteilhaft anhand einer 6-spaltigen Auflistung aller natürlichen Zahlen erstellt. Hieran können die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass Primzahlen größer als 3 Vorgänger oder Nachfolger von Vielfachen von 6 sind. Daher ist es sinnvoll, beim Auffinden größerer Primzahlen gezielt Vorgänger bzw. Nachfolger von Vielfachen von 6 zu betrachten.
- Beim Sieb des Eratosthenes nutzen die Schülerinnen und Schüler gezielt algorithmische Grundbausteine (Befehlsfolge, Verzweigung, Schleife). Daher bietet es sich an, anhand dieses Verfahrens auch die Kriterien von Algorithmen (Ausführbarkeit, Eindeutigkeit, Endlichkeit) zu erarbeiten.
- Als „Forscheraufgabe“ eignet sich beispielsweise das Zerlegen eines Rechtecks mit vorgegebenen Seitenlängen in Quadrate mit maximalem Flächeninhalt bzw. das Zerlegen eines Quaders mit vorgegebenen Kantenlängen in Würfel mit maximalem Volumen.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitale Rechentrainer zur Teilbarkeit
- Internetrecherche zu Regeln für die Teilbarkeit durch 7 oder durch 11
- Internetrecherche zu Primzahlen; größte bekannte Primzahl

Fakultative Inhalte

- *Hasse-Diagramme*
- *algebraischer Nachweis der Teilbarkeitsregel für eine Summe unter Verwendung des Distributivgesetzes*
- *Teilbarkeitsregeln für Teilbarkeit durch 4, 8, 11*
- *Beweis des Satzes von Euklid „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ z. B. exemplarisch und indirekt über die Suche nach einem Primteiler der Zahl* $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$
- *Vermutung von Goldbach als ungelöstes Problem der Zahlentheorie*
- *Bestimmen des ggT mithilfe des euklidischen Algorithmus*
- *Menge der gemeinsamen Teiler als Teilermenge des ggT*

Vorschläge und Hinweise

- *Menge der gemeinsamen Vielfachen als Vielfachenmenge des kgV*
- *Satz: Wenn zwei natürliche Zahlen a und b teilerfremd sind, dann gilt:* $kgV(a;b) = a \cdot b$
- *Formel:* $ggT(a;b) \cdot kgV(a;b) = a \cdot b$
- *Untersuchungen an Mersenne-Zahlen*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit Brüchen (Hauptnenner)
- Klassenstufe 7: Zuordnungen (Dreisatz-Verfahren: ggf. ggT als geschickter Zwischenschritt)
- Klassenstufe 9: Quadratwurzeln und reelle Zahlen (Irrationalitätsbeweise durch Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Schaltjahre und Schalttage im gregorianischen Kalender
- Eratosthenes (um 276 – 197 v. Chr.)
- Euklid (um 360 – 300 v. Chr.)

Im Themenfeld Brüche werden anhand von Figuren und einfachen Körpern Grundvorstellungen von Bruchteilen und Brüchen entwickelt. Unterschiedliche Darstellungen unterstützen den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen. Zu Beginn beschränkt man sich dabei zunächst auf die Betrachtung echter Brüche.

Die aus den vorangegangenen Themenfeldern bekannten Größen sowie geometrische Darstellungen liefern greifbare Beispiele, um Grundvorstellungen über Brüche als Teile eines Ganzen sowie Brüche als Teil mehrerer Ganzer aufzubauen. Das Operatorkonzept der Bruchrechnung wird mit dem „von-Ansatz“ in den Fokus genommen. Außerdem plausibilisieren Sachkontexte das Auftreten von unechten und gemischten Brüchen.

Darstellungen und Größen werden auch beim Erweitern und Kürzen von Brüchen gewinnbringend eingebracht. Die Darstellungen veranschaulichen zum einen die Idee des Verfeinerns bzw. Vergröberns einer Einteilung und zeigen zudem auf, dass verschiedene Brüche ein und dieselbe Bruchzahl repräsentieren können. Zudem werden beim Erweitern und Kürzen die bekannten Teilbarkeitsregeln in einen größeren arithmetischen Kontext eingebettet.

Beim Vergleichen und Anordnen von Brüchen werden Kenntnisse, die im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen erworben wurden, auf die neue Zahlenmenge übertragen. Die Schülerinnen und Schüler wissen aus dem Themenfeld Größen, dass Vergleichbarkeit über eine Angleichung der Einheiten gewährleistet werden kann und erkennen, dass Brüche mit gleichen Zählern bzw. gleichen Nennern besonders gut verglichen werden können. Geometrische Darstellungen unterstützen diese Erkenntnis.

Der Vergleich von Brüchen mit natürlichen Zahlen motiviert die Ergänzung des bisher bekannten Zahlenstrahls um diejenigen Zahlpunkte, die Bruchzahlen markieren und bereitet gleichzeitig die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ vor. Eine wichtige Erkenntnis ist dabei, dass die Bruchzahlen im Vergleich zu den natürlichen Zahlen dicht liegen.

Mit der Behandlung der Dezimalbrüche werden intuitive Vorstellungen, die bereits in vorangegangenen Themenfeldern von Bedeutung waren, aufgegriffen und systematisiert. Durch die zeitliche Nähe zum Bruchbegriff soll verdeutlicht werden, dass Brüche und Dezimalbrüche zwei verschiedene Schreibweisen für ein und dieselbe (Bruch-)Zahl sind. Der bereits bekannte Divisionsalgorithmus wird so erweitert, dass der Wert eines Quotienten nicht mehr mit Rest, sondern in Dezimalschreibweise notiert werden kann. In einfachen Fällen lernen die Schülerinnen und Schüler die Prozentschreibweise als weitere alternative Darstellungsform einer (Bruch-)Zahl kennen, deren systematische Behandlung im Sinne des Spiralcurriculums in Klassenstufe 7 erfolgt.

<table>
<tr><th>Inhaltsbezogene Kompetenzen</th><th>Prozessbezogene Kompetenzen</th></tr>
<tr><td>Brüche
Bruchschreibweise
Stammbruch als n-ten Teil eines Ganzen
Zähler und Nenner
Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird.
Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile den Anteil bilden.</td><td>Die Schülerinnen und Schüler
bestimmen in Streifen- und Kreisdiagrammen den Anteil einer eingefärbten Fläche an der Gesamtfläche,
stellen Brüche in Diagrammen zeichnerisch dar,
ergänzen einen angegebenen Anteil an einer Fläche zu einem Ganzen,
bestimmen in einfachen Fällen den Anteil eines eingefärbten Teilvolumens eines Quaders am gesamten Quader.</td></tr>
</table>

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Bruchteile und Größenwerte	

• Bruch als
  ○ mehrere Teile eines Ganzen
  ○ ein Teil mehrerer Ganzer
  ○ Bruch als Quotient natürlicher Zahlen
• echter Bruch, unechter Bruch
• gemischte Bruchschreibweise
	Die Schülerinnen und Schüler
	• interpretieren einen Bruch als Teile eines Ganzen im Kontext von Größen sowie geometrisch,
	• interpretieren einen Bruch als einen Teil mehrerer Ganzer im Kontext von Größen sowie geometrisch,
	• rechnen Bruchteile in Untereinheiten mit ganzzahliger Maßzahl um, z.B. $\frac{2}{3}$ h = 40 min,
	• rechnen Größen mit ganzzahligen Maßzahlen in Bruchteile einer Obereinheit um, z.B. 75 cm = $\frac{3}{4}$ m,
	• geben Quotienten natürlicher Zahlen als Bruch an,
	• identifizieren $\frac{n}{1}$ mit n für alle natürlichen Zahlen n,
	• wandeln unechte Brüche in die gemischte Schreibweise um und umgekehrt (auch bei Größenwerten).

Grundaufgaben der Bruchrechnung	
• Teile, Anteile und Ganze	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen einen Teil eines Ganzen z.B. $\frac{2}{5}$ von 20 €, • bestimmen den Anteil an einem Ganzen z.B. 12 g von 16 g, • bestimmen das Ganze z.B. 36 m sind $\frac{3}{4}$ von $\square$.
Erweitern und Kürzen	
• Erweitern als Verfeinerung ○ <u>Bezeichnung</u>: Erweitern eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner mit derselben Zahl $\neq 0$ zu multiplizieren.	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern anhand von Darstellungen, dass ein Anteil durch verschiedene Brüche beschrieben werden kann.

7. Brüche — Mathematik 5/6

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• Kürzen als Vergröberung
  ○ <u>Bezeichnung</u>: Kürzen eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl $\neq 0$ zu dividieren.
  ○ vollständig gekürzte Brüche
• Unterschied zwischen Bruchzahl und Bruch
  ○ verschiedene Brüche als Repräsentanten der gleichen Bruchzahl
  ○ Prozentangaben als alternative Darstellungsform
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen das Erweitern bzw. das Kürzen durch Verfeinern bzw. Vergröbern der Unterteilung von Rechteck- und Kreisdiagrammen,
	• erweitern Brüche um vorgegebene Erweiterungszahlen,
	• kürzen vorgegebene Brüche vollständig,
	• untersuchen, ob zwei Brüche dieselbe Bruchzahl repräsentieren,
	• begründen, dass jede Bruchzahl durch beliebig viele Brüche repräsentiert werden kann,
	• geben einfache Brüche (wie z.B. $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{100}$) in Prozent an und umgekehrt.

Anordnen • Vergleichen zweier Brüche • gleichnamige Brüche • Hauptnenner als kgV der Nenner vollständig gekürzter Brüche • Anordnen von Brüchen bzw. Bruchzahlen	Die Schülerinnen und Schüler • vergleichen Brüche anhand geometrischer Darstellungen, • vergleichen Brüche und Bruchteile von Größenwerten mit gleichen Zählern bzw. gleichen Nennern, • bringen bis zu vier Brüche auf den Hauptnenner, • ordnen bis zu vier Brüche, • beurteilen Interpretationen von Daten in den Medien (z.B. „Jeder Vierte, sogar jeder Fünfte…“).
Zahlenstrahl • Bruchzahl als Punkt auf dem Zahlenstrahl • Dichtliegen der Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl	Die Schülerinnen und Schüler • zeichnen in einfachen Fällen Zahlpunkte zu Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl ein und lesen umgekehrt Bruchzahlen zu Zahlpunkten ab, • skalieren den Zahlenstrahl geeignet im Hinblick auf den Hauptnenner, • geben eine Bruchzahl an, die zwischen zwei vorgegeben Bruchzahlen liegt.

7. Brüche — Mathematik 5/6

Inhaltsbezogene Kompetenzen | **Prozessbezogene Kompetenzen**

Die Schülerinnen und Schüler

- begründen, dass man zwischen zwei verschiedenen Bruchzahlen immer eine weitere Bruchzahl findet.

Dezimalbrüche

- Bezeichnung: Ein Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist, heißt Zehnerbruch.
- Erweiterung der Stellenwerttafel
  - Dezimale
- Darstellung eines Bruchteils
  - als Zehnerbruch
  - in der Dezimalbruchschreibweise
- Runden von Dezimalbrüchen
- Vergleichen zweier Dezimalbrüche
- Anordnen von Dezimalbrüchen

Die Schülerinnen und Schüler

- erweitern vollständig gekürzte Brüche, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 oder auch 5 besitzen, auf Zehnerbrüche,
- wandeln Zehnerbrüche in die Dezimalbruchschreibweise um und umgekehrt,
- begründen, warum man bei einem Dezimalbruch am Ende Nullen weglassen oder hinzufügen darf,
- wenden die bekannten Rundungsregeln auf Dezimalbrüche an,
- vergleichen Dezimalbrüche anhand der Stellenwerte der Dezimalen,
- ordnen bis zu vier Dezimalbrüche.

Erweiterung des Divisionsalgorithmus

- Fortführen des Divisionsalgorithmus mittels Kommaschreibweise
- endliche und periodische Dezimalbrüche
  - Periodensymbol
- Bei Verzicht auf die Periode 9 und die Enddezimale 0 gilt: Für jede Bruchzahl gibt es genau eine (entweder endliche oder periodische) Darstellung als Dezimalbruch.
- natürliche Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

Die Schülerinnen und Schüler

- begründen exemplarisch, dass nicht jeder Bruch als Zehnerbruch darstellt werden kann,
- wandeln Brüche mithilfe des Divisionsalgorithmus in die Dezimalbruchschreibweise um, ggf. unter Verwendung des Periodensymbols,
- geben die Dezimalbruchdarstellungen der Stammbrüche $\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ sowie weiterer geläufiger Brüche wie (z.B. $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$) an,
- begründen exemplarisch, dass periodische Dezimalbrüche mit der Periode 9 gleich dem zugehörigen endlichen Dezimalbruch sind, z. B. $0,\overline{9} = 1$.

Basisbegriffe

Anteil, Bruch (Dezimal-, echter, gemischter, Stamm-, unechter, vollständig gekürzter, Zehner-), Bruchzahl, Dezimale, erweitern, Ganzes, gleichnamig, kürzen, (Haupt-)Nenner, Periode, Teil, Zähler

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Da der Winkelbegriff noch nicht zur Verfügung steht, empfiehlt sich bei der Arbeit mit Kreisdiagrammen der Einsatz vorgegebener Einteilungen in Sektoren bzw. händische Modelle von Sektoren (z. B. die Rückseite des Geobretts).
- Beim Bestimmen von Teilen, Anteilen und Ganzen steht nicht das systematische Rechnen, sondern das Argumentieren mit Grundvorstellungen im Fokus.
- Bei der Grundaufgabe „Bestimmung eines Teils eines Ganzen“ wird das „von“ im Rechenterm durch ein „mal“ ersetzt.
- Beim Ermitteln des Ganzen empfiehlt sich das Verwenden von Umkehroperationen in Verbindung mit Pfeildiagrammen.
- Beim Veranschaulichen des Erweiterns und Kürzens an Rechteck- bzw. Kreisdiagrammen eignen sich in besonderem Maße Brüche, deren Nenner Teiler von 100 oder von 24 sind, z.B. $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ bzw. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.
- Die Verwendung von Rechteckdiagrammen bietet sowohl einfache enaktive Zugänge als auch die Anschlussfähigkeit zum Rechnen mit Brüchen. Für enaktive Zugänge sind auch Körper wie beispielsweise Klemmbausteine geeignet.
- Stammbrüche können auch als Quasi-Ordinalzahlen (z. B. jeder Dritte – im strikten und im statistischen Sinne) interpretiert werden.
- Der Unterschied zwischen Bruchzahl und Bruch lässt sich am Zahlenstrahl mithilfe von „Sprechblasen“ erarbeiten (z.B. Bruchzahl $\frac{1}{2}$ mit „Sprechblase“ $\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8}$, ...).
- Im Lehrplan werden die folgenden Sprechweisen verwendet: Ein Bruch und ein Dezimalbruch sind unterschiedliche „Darstellungen“ einer Bruchzahl (z. B. sind $\frac{2}{4}$ und 0,5 zwei Darstellungen der Bruchzahl $\frac{1}{2}$), zwei verschiedene Brüche sind unterschiedliche „Repräsentanten“ einer Bruchzahl (z. B. $\frac{2}{4}$ und $\frac{5}{10}$ als Repräsentanten von $\frac{1}{2}$)
- Das Umwandeln von unechten Brüchen in die gemischte Schreibweise kann mithilfe geometrischer Darstellungen oder über die Division mit Rest erfolgen.
- In einfachen Fällen kann der Vergleich zweier Brüche indirekt über den Vergleich der Ergänzungsglieder bis zum nächsten Ganzen (z.B. bei $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$) oder mit einer dazwischen gelegenen (Bruch-)Zahl als Vergleichsbasis (z.B. bei $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{7}$ im Vergleich mit $\frac{1}{2}$) erfolgen.
- Durch Gleichnamigmachen zweier Brüche und geeignetes Erweitern kann man begründen, dass zwischen zwei Bruchzahlen stets weitere Bruchzahlen liegen.

Vorschläge und Hinweise

- Zur Verdeutlichung der Vielzahl unterschiedlicher Darstellungen von Bruchzahlen und zum Auftreten von Brüchen im Alltag eignet sich das Gestalten eines sog. „Brüchebuches".
- Als „Forscheraufgaben" eignen sich Untersuchungen hinsichtlich rein- bzw. gemischtperiodischer Dezimalbrüche im Zusammenhang mit der Primfaktorzerlegung des Nenners sowie Untersuchungen hinsichtlich der Periodenlänge.

Fakultative Inhalte

- *Interpretation von Brüchen als Eintrittschance in geeigneten Kontexten*
- *Unterscheidung zwischen reinperiodischen und gemischtperiodischen Dezimalbrüchen*
- *Begründung, dass bei einem vollständig gekürzten Bruch mit Nenner m die Periodenlänge der Dezimalbruchdarstellung höchstens m-1 beträgt*
- *Umwandlung von periodischen Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Natürliche Zahlen
- Klassenstufen 5/6: Teilbarkeit
- Klassenstufe 7: Einführung in die Stochastik
- Klassenstufe 8: Terme

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Taktbezeichnungen in der Musik
- Bruchbilder von Max Bill

Im Themenfeld „Rechnen mit Brüchen“ werden die rechnerischen Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler beim Rechnen mit natürlichen Zahlen ausgebildet haben, auf Bruchzahlen ausgeweitet. Der Einstieg in das Rechnen mit Brüchen erfolgt der Anschaulichkeit und Zugänglichkeit wegen über Sachsituationen, wobei auch der Arbeit mit geometrischen Veranschaulichungen eine große Bedeutung zukommt.

Bei der Behandlung der Division wird eine zunächst vorhandene Lücke geschlossen: Der Wert eines Quotienten kann nun stets als Bruch angegeben werden. Dabei sollte betont werden, dass Brüche vollwertige Zahldarstellungen und nicht nur „Zwischenergebnisse“ mit der Aufforderung zum Ausrechnen darstellen und diese zum Teil sogar höhere Genauigkeit aufweisen als ein entsprechend gerundeter Dezimalbruch (z.B. $\frac{1}{3}$ verglichen mit $0{,}33$).

Über das Themenfeld hinweg werden die Schülerinnen und Schüler mit zahlreichen Vorstellungsumbrüchen konfrontiert. Insbesondere die Vorstellungen, dass das Multiplizieren stets vergrößert und das Dividieren stets verkleinert, müssen aufgegeben werden.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Addieren und Subtrahieren von Brüchen	
• Additions- und Subtraktionsregel für gleichnamige und für ungleichnamige Brüche • Einschränkung beim Subtrahieren	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen das Addieren und das Subtrahieren von Brüchen an geeigneten Modellen und Diagrammen, • formulieren ausgehend von Sachsituationen Regeln für das Addieren und Subtrahieren von Brüchen, • bestimmen Werte von Summen und Differenzen von Brüchen (auch mit natürlichen Zahlen als Rechengliedern), • führen einfache Additionen und Subtraktionen mit Brüchen im Kopf durch, • begründen exemplarisch, dass die Subtraktion nur eingeschränkt möglich ist.
Addieren und Subtrahieren von endlichen Dezimalbrüchen	
• Additions- und Subtraktionsregel • Einschränkung beim Subtrahieren	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren ausgehend von Sachsituationen Regeln für das Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen, • führen das Addieren und das Subtrahieren von Dezimalbrüchen auf das Rechnen mit Zehnerbrüchen zurück, • bestimmen Werte von Summen und Differenzen von Dezimalbrüchen (auch mit natürlichen Zahlen als Rechengliedern).

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • führen einfache Additionen und Subtraktionen mit Dezimalbrüchen im Kopf durch, • begründen exemplarisch, dass die Subtraktion nur eingeschränkt möglich ist.
Eigenschaften der Addition • Kommutativität (K^+) • Assoziativität (A^+) • Neutrales Element (N^+)	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen die Kommutativität der Addition von (Dezimal-)Brüchen geometrisch, • formulieren die Eigenschaften der Addition verbal, • verschaffen sich Rechenvorteile durch Nutzen der Eigenschaften.

Multiplizieren von Brüchen
• Multiplikation
  ○ einer natürlichen Zahl mit einem Bruch als wiederholte Addition
  ○ eines Bruchs mit einer natürlichen Zahl („von-Ansatz“)
  ○ zweier Brüche (Bruchteile von Bruchteilen)
• Multiplikationsregeln
• Kürzen in Produkten von Brüchen
• Potenzieren von Brüchen (mit natürlichen Exponenten)
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen das Produkt aus einer natürlichen Zahl und einem Bruch, das Produkt aus einem Bruch und einer natürlichen Zahl sowie das Produkt zweier Brüche geometrisch anhand von Kreis- bzw. Rechteckflächen,
	• formulieren ausgehend von geometrischen Veranschaulichungen die Regel für die Multiplikation zweier Brüche,
	• grenzen Multiplizieren und Erweitern voneinander ab,
	• bestimmen Werte von Produkten von Brüchen (auch mit natürlichen Zahlen als Rechengliedern),
	• kürzen Brüche in Produkten mit mehreren Faktoren,
	• begründen exemplarisch, dass man in Produkten kürzen darf, in Summen und Differenzen jedoch nicht,
	• bestimmen in einfachen Fällen Werte von Potenzen von Brüchen,
	• grenzen Potenzieren und Multiplizieren voneinander ab.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Dividieren von Brüchen

- Division
  - eines Bruches durch eine natürliche Zahl
  - einer natürlichen Zahl durch einen Bruch
- Division eines Bruches durch einen Bruch über das Lösen der Umkehraufgabe
  - Pfeildiagramm
  - Begriff: Kehrbruch
  - Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrbruch
- keine Einschränkung bei der Division von und mit Brüchen (Divisor $\neq 0$)
- einfache Doppelbrüche

Die Schülerinnen und Schüler

- formulieren zu vorgegebenen Sachkontexten passende Divisionsaufgaben (mit und ohne Brüche),
- veranschaulichen den Quotienten aus einem Bruch und einer natürlichen Zahl geometrisch anhand von Kreis- oder Rechteckflächen,
- veranschaulichen den Quotienten aus einer natürlichen Zahl und einem Bruch geometrisch anhand von Strecken, Kreis- oder Rechteckflächen,
- bestimmen Werte von Quotienten aus einem Bruch und einer natürlichen Zahl bzw. aus einer natürlichen Zahl und einem Bruch,
- formulieren (z. B. ausgehend von Pfeildiagrammen) die Regel für die Division eines Bruches durch einen Bruch,
- bestimmen Werte von Quotienten von Brüchen,
- identifizieren $p : q$ mit $\frac{p}{q}$ für alle Brüche p und q $(q \neq 0)$,
- berechnen Werte von Doppelbrüchen,
- kürzen Doppelbrüche, indem sie diese zuvor in ein Produkt umwandeln.

Multiplizieren von endlichen Dezimalbrüchen

- Multiplikation eines Dezimalbruchs mit
  - einer Zehnerpotenz
  - einer natürlichen Zahl
  - einem Dezimalbruch

Die Schülerinnen und Schüler

- formulieren (z. B. ausgehend von der Umwandlung des Dezimalbruches in einen Zehnerbruch) die Kommaverschiebungsregel für die Multiplikation mit Zehnerpotenzen,
- berechnen Werte von Produkten mit Zehnerpotenzen,
- berechnen Werte von Produkten mit natürlichen Zahlen, indem sie den Dezimalbruch in einen Zehnerbruch umwandeln.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren ausgehend von der Umwandlung in Zehnerbrüche die Regel für die Multiplikation zweier endlicher Dezimalbrüche, • berechnen Werte von Produkten von endlichen Dezimalbrüchen.
Dividieren von endlichen Dezimalbrüchen	

• Division eines Dezimalbruchs durch
  ○ eine Zehnerpotenz
  ○ eine natürliche Zahl
    - Erweiterung des Divisionsalgorithmus
  ○ einen Dezimalbruch
    - gleichsinnige Kommaverschiebung
	Die Schülerinnen und Schüler
	• formulieren ausgehend von der Umwandlung des Dezimalbruches in einen Zehnerbruch die Kommaverschiebungsregel für die Division durch Zehnerpotenzen,
	• berechnen Werte von Quotienten mit Zehnerpotenzen als Divisor,
	• berechnen Werte von Quotienten mit natürlichen Zahlen als Divisor durch Erweiterung des Divisionsalgorithmus,
	• begründen exemplarisch, dass das Ergebnis der Division durch eine natürliche Zahl nicht immer als endlicher Dezimalbruch geschrieben werden kann,
	• führen das Dividieren durch einen Dezimalbruch durch gleichsinnige Kommaverschiebung auf das Dividieren durch eine natürliche Zahl zurück,
	• berechnen Werte von Quotienten von endlichen Dezimalbrüchen.

Eigenschaften der Multiplikation	
• Kommutativität ($K^\bullet$) • Assoziativität ($A^\bullet$) • Neutrales Element ($N^\bullet$) • <u>Satz</u>: Zu jedem Bruch $\frac{a}{b} \neq 0$ gibt es den Kehrbruch $\frac{b}{a}$ mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen die Kommutativität der Multiplikation von (Dezimal-)Brüchen geometrisch, • formulieren die Eigenschaften der Multiplikation verbal, • verschaffen sich Rechenvorteile durch Nutzen der Eigenschaften.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • begründen exemplarisch, dass die Division von (Dezimal-)Brüchen nicht kommutativ ist.
Rechenterme • Terme mit mehreren Rechenarten und unterschiedlichen Zahldarstellungen • Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Zahldarstellung • Distributivität	Die Schülerinnen und Schüler • wählen beim Rechnen mit Brüchen, Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen eine geeignete Zahldarstellung, • berechnen den Wert von Rechentermen mit höchstens zwei Klammerebenen und höchstens sieben Zahlen in unterschiedlichen Zahldarstellungen (zusätzlich mit digitalen Rechentrainern möglich), • begründen anhand beispielhafter Rechenterme, dass die Ergebnisse unabhängig von der Zahldarstellung sind, • verschaffen sich Rechenvorteile, auch durch Ausmultiplizieren und Ausklammern, • lösen Sachaufgaben, bei denen mehrere Rechenarten und Zahldarstellungen vorkommen (auch im Kontext BNE möglich).

Basisbegriffe

Doppelbruch, Kehrbruch, Kommaverschiebung (gleichsinnige)

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Die zusammenhängende Behandlung der Rechenoperationen (zunächst Addieren und Subtrahieren für Brüche und Dezimalbrüche, danach Multiplizieren und Dividieren) betont inhaltliche Zusammenhänge zwischen den beiden Darstellungsarten gegenüber den Kalkülen.
- Bei der Übertragung der Rechenregeln auf die neue Zahlenmenge greifen die Schülerinnen und Schüler intuitiv auf das Permanenzprinzip zurück, ohne dass dieses explizit thematisiert wird.
- Die Addition sollte an konkreten Modellen (z.B. Pizzamodell, Rechteckmodell, Vorder- und Rückseite des Geobrettes) veranschaulicht werden.
- Die Addition bzw. Subtraktion von Brüchen ist in einfachen Fällen auch ohne Bestimmung des Hauptnenners durchzuführen (z.B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$).

Vorschläge und Hinweise

- Die Regeln zum Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen können beispielsweise über Größen mit ganzzahligen Maßzahlen (4,25 € + 5,01 € = 425 ct + 501 ct = 926 ct = 9,26 €), in gemischten Einheiten (4,25 € + 5,01 € = 4 € 25 ct + 5 € 1 ct = 9 € 26 ct = 9,26 €) oder über die Umwandlung in gewöhnliche Brüche und die Anwendung der für Brüche geltenden Regeln erarbeitet werden.
- Geeignete geometrische Veranschaulichungen zum Multiplizieren von Brüchen sind entsprechend unterteilte Kreis- oder Rechteckdiagramme. Die Reckteckdiagramme können beispielsweise durch das Falten von Papierbögen oder das Spannen von Gummibändern am Geobrett erzeugt werden.
- Geeignete geometrische Veranschaulichungen zum Dividieren von Brüchen sind entsprechend unterteilte Streifendiagramme, wobei die Leitidee des Messens benutzt wird (Wie oft passt … in …?).
- Bei der Behandlung des Multiplizierens und Dividierens von Dezimalbrüchen ist alternativ zur Verwendung der Zehnerbrüche auch ein Rückgriff auf Größen möglich.
- Die Multiplikation eines Dezimalbruches mit einer natürlichen Zahl ist als Vorstufe zur Multiplikation mit einem Dezimalbruch zu verstehen, eine Regelformulierung ist nicht vorgesehen.
- Bei der Behandlung der Division wird vorausgesetzt, dass der Divisor von Null verschieden ist, auch wenn es nicht jedes Mal explizit angegeben ist.
- Bei den Doppelbrüchen ist es ausreichend, sich auf einfache Fälle zu beschränken.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitale Rechentrainer

Fakultative Inhalte

- *Nummerieren und Abzählen der Bruchzahlen z.B. nach Georg Cantor (1845-1918)*
- *Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Größen
- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit natürlichen Zahlen
- Klassenstufe 7: Terme

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Taktbezeichnungen in der Musik
- Bruchbilder von Max Bill

9. Kreis, Winkel, Symmetrie — Mathematik 5/6

In diesem Themenfeld werden die zeichnerischen Fertigkeiten bei der Handhabung von Lineal, Geodreieck und Zirkel aus der Primarstufe bzw. aus den vorherigen Themenfeldern weiter gefestigt. Eine wichtige Ergänzung stellen digitale Mathematikwerkzeuge dar, die durch ihre Möglichkeiten der Veranschaulichung von Sachverhalten und des entdeckenden Lernens in besonderer Weise zum eigenständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler anregen. Fähigkeiten, die die Schülerinnen und Schüler in den vorherigen Themenfeldern erlernt haben, werden aufgegriffen und vertieft.

Die Kenntnisse um Größen werden um das Winkelmaß erweitert. Damit erschließen sich wichtige Anwendungsbereiche der Mathematik, insbesondere im Gebiet der Geometrie, aber auch im Hinblick auf das Anfertigen von Kreisdiagrammen im Themenfeld „Statistische Daten“.

Mit der Behandlung der Symmetrie werden die Schülerinnen und Schüler für geometrische Strukturen in ihrer Umwelt sensibilisiert. Darüber hinaus werden besondere Eigenschaften von Figuren untersucht, wobei das händische Arbeiten mit Spiegeln, Papier, Schere, Zirkel und Lineal durch den Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen ergänzt wird.

Im Zuge der Behandlung der Grundkonstruktionen in Klassenstufe 7 begegnen den Schülerinnen und Schülern die Abbildungen erneut. Kongruenzgeometrische Aspekte werden erst in Klassenstufe 8 in den Blick genommen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Kreis	
• Definition: Die Menge aller Punkte, die den Abstand r vom Punkt M haben, heißt Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. • Durchmesser eines Kreises als größter Abstand zweier Kreispunkte	Die Schülerinnen und Schüler • benennen in ihrer Umwelt kreisförmige Objekte, • identifizieren unterschiedliche Kreise am Globus, • zeichnen Kreise und Kreisornamente mit dem Zirkel sowie mithilfe einer Geometriesoftware, • zeichnen Kreise mithilfe der „Gärtnerkonstruktion“, • ermitteln zeichnerisch die Punkte, die von zwei Punkten einen vorgegebenen Abstand haben.
Winkel	

• Bezeichnung: Dreht man eine von zwei übereinanderliegenden Halbgeraden um ihren gemeinsamen Anfangspunkt, so nennt man die überstrichene Punktmenge einen Winkel.
  ○ Scheitel und Schenkel
  ○ Drehsinn: gegen den Uhrzeigersinn
	Die Schülerinnen und Schüler
	• ermitteln Winkelmaße in Figuren,
	• schätzen Winkelmaße ohne Hilfsmittel,
	• zeichnen Winkel mit einem vorgegebenen Maß mit dem Geodreieck sowie mithilfe einer Geometriesoftware,
	• unterscheiden $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSA$.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

• Gradmaß eines Winkels: Unterteilung des vollen Winkels in 360 gleich große Teilwinkel von je 1°
• Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ für Winkel und Winkelmaße
• Symbole $\sphericalangle ASB$ für den Winkel und $\lvert\sphericalangle ASB\rvert$ für das Maß von $\sphericalangle ASB$
• Winkelarten: spitz, recht, stumpf, gestreckt, überstumpf, voll
• besondere Dreiecke
  ○ gleichschenkliges Dreieck
    - Begriffe: Schenkel, Basis, Basiswinkel, Winkel an der Spitze
  ○ gleichseitiges Dreieck
	Die Schülerinnen und Schüler
	• bezeichnen die Innenwinkel in Vielecken mithilfe je dreier Eckpunkte,
	• geben die Art eines vorgegebenen Winkels ohne Messung an,
	• untersuchen die Längen- und Winkelbeziehungen besonderer Dreiecke.

Achsensymmetrie und Achsenspiegelung	

• <u>Definition</u>: Eine Figur heißt achsensymmetrisch, wenn sie durch Umklappen um eine Gerade mit sich zur Deckung gebracht werden kann.
  ○ Symmetrieachse a
• Symmetrieachsen von
  ○ Rechteck und Quadrat
  ○ gleichschenkligem und gleichseitigem Dreieck
  ○ Kreis
• Achsenspiegelung
  ○ Begriffe: Spiegelachse a, Punkt P und Bildpunkt P‘, Fixpunkt
  ○ Eigenschaften: Längentreue, Winkeltreue, Parallelentreue, Geradentreue, Änderung des Umlaufsinns
• <u>Basiswinkelsatz</u>: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren achsensymmetrische Figuren aus dem Alltag,
	• untersuchen die Achsensymmetrie von Figuren mithilfe von Spiegeln,
	• zeichnen mithilfe des Geodreiecks Symmetrieachsen in Figuren ein,
	• stellen achsensymmetrische Figuren durch Falten, Färben oder Ausschneiden her,
	• geben an, dass der Bildpunkt P‘ auf der Senkrechten zu a durch P liegt,
	• geben an, dass P und P‘ denselben Abstand zu a haben, aber auf unterschiedlichen Seiten der Spiegelachse liegen,
	• spiegeln Punkte und Figuren mithilfe des Geodreiecks an Geraden,
	• untersuchen eine durch Achsenspiegelung entstandene Bildfigur hinsichtlich der Eigenschaften der Achsenspiegelung,
	• begründen den Basiswinkelsatz mithilfe der Eigenschaften der Achsenspiegelung.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • spiegeln Figuren mithilfe einer Geometriesoftware zweimal hintereinander an senkrecht aufeinanderstehenden Spiegelachsen.

Punktsymmetrie und Punktspiegelung
• <u>Definition</u>: Eine Figur, die nach einer halben Drehung um einen Punkt mit sich selbst zur Deckung kommt, heißt punktsymmetrisch.
  ○ Symmetriezentrum Z
• Symmetriezentren von
  ○ Rechteck und Quadrat
  ○ Kreis
• Punktspiegelung
  ○ Eigenschaften: Längentreue, Winkeltreue, Parallelentreue, Geradentreue, gleichbleibender Umlaufsinn
	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren punktsymmetrische Figuren aus dem Alltag (z.B. bei Spielkarten),
	• geben an, dass der Bildpunkt P‘ auf der Geraden durch P und Z liegt,
	• geben an, dass P und P‘ denselben Abstand zu Z haben, aber auf unterschiedlichen Seiten von Z liegen,
	• untersuchen mithilfe eines Geodreiecks Figuren auf Punktsymmetrie und zeichnen ggf. das Symmetriezentrum ein,
	• spiegeln Punkte und Figuren an einem Symmetriezentrum mithilfe des Geodreiecks sowie mithilfe einer Geometriesoftware.

Drehsymmetrie und Drehung
• <u>Definition</u>: Eine Figur heißt drehsymmetrisch, wenn sie durch eine Drehung mit einem Zentrum Z um einen Winkel mit dem Maß α ($0° < \alpha < 360°$) mit sich zur Deckung gebracht werden kann.
  ○ Drehzentrum Z, Drehwinkel
• Drehzentrum von
  ○ Rechteck und Quadrat
  ○ gleichseitigem Dreieck
  ○ Kreis
• Drehung
  ○ Eigenschaften: Längentreue, Winkeltreue, Parallelentreue, Geradentreue, gleichbleibender Umlaufsinn
• Punktsymmetrie als Sonderfall mit $\alpha = 180°$
	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren drehsymmetrische Figuren im Alltag,
	• bestimmen bei vorgegebenen drehsymmetrischen Figuren das Drehzentrum Z und die Maße der Drehwinkel,
	• drehen Punkte und Figuren mithilfe des Geodreiecks und des Zirkels an einem Drehzentrum um einen Drehwinkel mit vorgegebenem Maß,
	• untersuchen eine durch Drehung entstandene Bildfigur hinsichtlich der Eigenschaften der Drehung,
	• erzeugen drehsymmetrische Figuren mit Geodreieck und Zirkel sowie mit einer Geometriesoftware.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Verschiebung • Verschiebung ○ Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$: Alle zu einer Verschiebung gehörenden Verschiebungspfeile sind parallel zueinander, gleich lang und zeigen in dieselbe Richtung • Eigenschaften: Längentreue, Winkeltreue, Parallelentreue, Geradentreue, gleichbleibender Umlaufsinn	Die Schülerinnen und Schüler • identifizieren Verschiebungen im Alltag, • zeichnen mithilfe des Geodreiecks Verschiebungspfeile in Figuren ein, • stellen verschiebungssymmetrische Figuren durch Falten und Ausschneiden her, • verschieben Punkte und Figuren mithilfe des Geodreiecks sowie mithilfe einer Geometriesoftware, • bestimmen Koordinaten von Punkten bzw. Bildpunkten bei Verschiebungen rechnerisch, • untersuchen eine durch Verschiebung entstandene Bildfigur hinsichtlich der Eigenschaften der Verschiebung.

Basisbegriffe

Achsenspiegelung, Achsensymmetrie, Basis, Basiswinkel(-satz), Bild(-figur, -punkt, -strecke, -winkel), Drehsinn, Drehsymmetrie, Drehung, Drehwinkel, Drehzentrum, Durchmesser, Fixpunkt, gleichschenklig, gleichseitig, Grad(-maß), Innenwinkel, Mittelpunkt, Punktsymmetrie, Radius, Scheitel, Schenkel, Symmetrie(-achse, -zentrum), (Längen-, Geraden-, Parallelen-, Winkel-)Treue, Umlaufsinn, Verschiebung, Verschiebungspfeil, Winkel (gestreckter, spitzer, stumpfer, überstumpfer, voller), Winkelmaß

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Neben der abbildungsgeometrischen Vorstellung eines Winkels als überstrichene Punktmenge trägt auch die statische Vorstellung als Sektor in der Ebene den Winkelbegriff. Entsprechend dieser beiden Sichtweisen gibt es zwei Möglichkeiten Winkel zu messen: durch Drehen des Geodreiecks oder durch Auflegen.
- Als Einstieg in die Achsensymmetrie bieten sich Experimente mit Spiegeln an.
- Die Definition der Achsensymmetrie bezieht sich auf konkrete Figuren aus dem Alltag, beispielsweise Verkehrsschilder, Logos von Fahrzeugen oder symmetrische Großbuchstaben des Alphabets (Schriftart beachten), die Symmetrie von Figuren auf dem Geobrett oder die näherungsweise Symmetrie von Gesichtern.
- Der Übergang von der Achsen- zur Punktsymmetrie kann erfolgen, indem Figuren zweimal hintereinander an senkrecht aufeinander stehenden Spiegelachsen gespiegelt werden. Denkbar ist dann, zunächst die Eigenschaften der Punktspiegelung zu betrachten und erst im Anschluss die Definition der Punktsymmetrie zu behandeln.

Vorschläge und Hinweise

- Bei der Untersuchung punktsymmetrischer Figuren ist der Begriff Drehung anschaulich zu verstehen, gewonnen aus den Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler sowie aus der Betrachtung konkreter punktsymmetrischer Figuren. Die Definition der Drehung erfolgt im Nachgang im Zuge der Behandlung der Drehsymmetrie.
- Als „Forscheraufgabe" eignet sich das Erkunden von Sonderfällen bei der Lagebeziehung zwischen einer Geraden und der Spiegelachse und den sich daraus ergebenden besonderen Lagen der Bildgeraden.

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Geocaching (GPS-Schnitzeljagd): Ermitteln der Position eines „Geocaches" anhand von Koordinatenangaben und weiteren Beschreibungen im Internet

Fakultative Inhalte

- *Hintereinanderausführung von Abbildungen*
- *Parkettierungen (periodische und nichtperiodische)*
- *Bestimmung des Drehzentrums bei vorgegebenem Maß des Drehwinkels und gegebenem Punkt und Bildpunkt*
- *Analysieren von Symmetriemustern von Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972)*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Figuren und Körper
- Klassenstufe 7: Geometrische Abbildungen
- Klassenstufe 7: Winkel in Figuren
- Klassenstufe 8: Kongruenz und Dreieckskonstruktionen
- Klassenstufe 8: Kreis und Zylinder

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Reflexionsgesetz
- Rosetten und andere Symmetriemuster bei Bauwerken
- Bandornamente

Der verständige Umgang mit Daten steht im Mittelpunkt dieses Themenfelds. Erste Grundlagen dazu wurden bereits in Klassenstufe 5 gelegt. Die Einführung der Bruchzahlen sowie die Behandlung von Kreisen und Winkeln in Klassenstufe 6 öffnet den Schülerinnen und Schülern den Zugang zu weiteren Diagrammarten zur Darstellung von Daten. Zudem verfügen sie nun über die Möglichkeiten, Lageparameter wie den arithmetischen Mittelwert zu bestimmen und zu interpretieren.

Neben der Darstellung und der Interpretation gegebener Datensätze liegt der Fokus auch auf dem eigenständigen Erheben und Auswerten von Daten, die die Schülerinnen und Schüler selbst in ihrem Umfeld sammeln. Geeignete Computerprogramme wie beispielsweise Tabellenkalkulationen unterstützen sie dabei.

Ein weiterer Schwerpunkt dieses Themenfelds liegt auf dem kritischen Umgang mit vorgegebenen Darstellungen – beispielsweise aus Werbung, Politik oder Wirtschaft, um manipulierende Darstellungen zu identifizieren und kritisch zu hinterfragen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Häufigkeiten und ihre Darstellung
 	
• Häufigkeiten
  ○ absolute Häufigkeit
  ○ relative Häufigkeit:
    - Werte zwischen 0 und 1
    - Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Ausprägungen eines Merkmals ergibt 1.
• Kreisdiagramme
  ○ Kreissektor
  ○ Mittelpunktswinkel
  ○ Kreisdiagramme für geeignete Vielfache von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$
	Die Schülerinnen und Schüler
	• bestimmen absolute und relative Häufigkeiten,
	• stellen absolute Häufigkeiten in Stab-, Säulen- oder Balkendiagrammen dar,
	• berechnen Maße von Mittelpunktswinkeln zu vorgegebenen Werten von relativen Häufigkeiten,
	• stellen relative Häufigkeiten in Stab-, Säulen-, Balken- oder Kreisdiagrammen dar (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge; auch im Kontext BNE möglich),
	• begründen, warum die relative Häufigkeit nur Werte von 0 bis 1 annimmt,
	• begründen, warum bei einer statistischen Erhebung die Summe der relativen Häufigkeiten aller Ausprägungen eines Merkmals gleich 1 ist,
	• erläutern die Problematik, dass sich durch Rundungen für die Summe der relativen Häufigkeiten ein von 1 abweichender Wert ergeben kann.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Erhebung von Daten
 	
• Erhebung und Erfassung von Daten
• manipulierende Darstellungen wie
  ○ ungleichmäßige Achsenskalierung
  ○ Wegfall von Sockelwerten
  ○ Darstellung von ausgewählten Ausschnitten
	Die Schülerinnen und Schüler
	• identifizieren in (auch selbstgewählten) Kontexten Merkmale, die sich für statistische Auswertungen anbieten,
	• erfassen Daten in Strichlisten, organisieren sie in Tabellen und stellen sie in geeigneten Diagrammen mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms dar,
	• entnehmen Daten aus Diagrammen und interpretieren sie im Sachzusammenhang,
	• treffen Vorhersagen auf Grundlage vorliegender Datensätze (auch im Kontext BNE möglich),
	• untersuchen die unterschiedliche Wirkung von Diagrammen mit derselben Datengrundlage, aber unterschiedlichen Darstellungen,
	• beurteilen die Darstellung von Daten in Medien in Bezug auf die Absicht und mögliche Wirkungen der Darstellung.

Kenngrößen
 	
• arithmetischer Mittelwert
  ○ zweier Zahlen
  ○ mehrerer Zahlen
• Minimum und Maximum
• Spannweite
• Median einer geordneten Liste:
  ○ bei ungerader Anzahl der Daten als der in der Mitte der Liste stehende Wert
  ○ bei gerader Anzahl der Daten als der arithmetische Mittelwert der beiden in der Mitte der Liste stehenden Werte
• unteres und oberes Quartil
• Boxplot
	Die Schülerinnen und Schüler
	• ermitteln anhand des Zahlenstrahls den arithmetischen Mittelwert zweier Zahlen,
	• ermitteln und interpretieren den arithmetischen Mittelwert mehrerer Zahlen (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge; auch im Kontext BNE möglich),
	• veranschaulichen den arithmetischen Mittelwert von Datensätzen in Säulendiagrammen,
	• ermitteln und interpretieren die Kenngrößen Maximum, Minimum, Spannweite, Median und Quartile,
	• stellen Median, Quartile sowie Minimum und Maximum in Boxplots dar,
	• entnehmen Daten aus Boxplots und interpretieren diese im Sachkontext.

Basisbegriffe

Boxplot, Häufigkeit (absolut, relativ), Kreisdiagramm, Kreissektor, Maximum, Median, Minimum, Mittelpunktswinkel, Quartil (oberes, unteres), Spannweite

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Alternativ lässt sich der Median bei einer geraden Anzahl von Daten als der untere der beiden mittleren Werte bestimmen.
- Als Datenquelle für Boxplots eigenen sich beispielsweise „Trumpf-Quartette".
- Das Erheben, Auswerten und Präsentieren von Daten aus dem schulischen Umfeld (z.B. zum täglichen Medienkonsum) in Form eines Projekts fördert die Schülerinnen und Schüler im selbstständigen Arbeiten.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Mittelwertbildung bei Jahrestemperaturen: Vergleich der Mittelwerte über einen längeren Zeitraum
  - Datenerhebung (in der Schule, im Freundeskreis, in der Familie) zum Thema „Konsum" (z.B.: Wie viele T-Shirts besitzt du und wie viele davon hast du bisher höchstens zweimal getragen?)
  - Datenerhebung (in der Schule, im Freundeskreis, in der Familie) zum Thema „Medienkonsum" (z.B.: Wie viele Stunden nutzt du täglich dein Handy/deinen Computer?)

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- Erstellen von Kreisdiagrammen mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen

Fakultative Inhalte

- *Abweichung des Jahresmittelwertes vom arithmetischen Mittelwert der Monatsmittelwerte (beispielsweise bei Klimadiagrammen)*
- *Chuquet-Mittel*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit Brüchen
- Klassenstufen 5/6: Kreis, Winkel, Symmetrie
- Klassenstufe 7: Einführung in die Stochastik

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Umfrageergebnisse bei Verbrauchern
- Prognosen bei Wahlen
- Mittelwertbildung beim Auswerten von Messreihen, z. B. von Temperaturtabellen

Im Themenfeld „Ganze Zahlen“ werden ausgehend von Alltagssituationen wie beispielsweise Temperaturverläufen, Kontoständen oder Höhenlagen Grundvorstellungen (Aufheben, Bewegen) zu negativen Zahlen entwickelt. Das bisher nur als Rechenzeichen bekannte Minuszeichen wird erstmals auch als Vorzeichen verwendet. Unterschiedliche Darstellungen unterstützen den Aufbau der Grundvorstellungen und werden bei der Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden sowie des Koordinatensystems auf vier Quadranten gewinnbringend eingesetzt.

Beim Vergleichen und Anordnen von ganzen Zahlen werden die Kenntnisse aus den Klassenstufen 5 und 6 auf die neue Zahlenmenge übertragen. Geometrische Darstellungen unterstützen diesen Prozess. Geleitet wird die Zahlbereichserweiterung von der Menge der natürlichen Zahlen zur Menge der ganzen Zahlen vom Permanenzprinzip.

Die uneingeschränkte Durchführbarkeit von Subtraktionen beim Rechnen mit ganzen Zahlen eröffnet die Möglichkeit, weitere reale Situationen zu beschreiben. Die Behandlung der Grundrechenarten erfolgt in der Klassenstufe 6 mit der Einschränkung, dass das zweite Rechenglied eine natürliche Zahl ist. Dadurch kann beim Addieren bzw. Subtrahieren die Vorstellung des Hinzufügens bzw. Verminderns zunächst beibehalten werden. Insbesondere bei der Addition und der Subtraktion unterstützen geeignete Sachkontexte die Erweiterung der Grundvorstellungen.

Eine Erweiterung auf negative ganze Zahlen als zweites Rechenglied erfolgt erst in der Klassenstufe 7 bei der Behandlung der rationalen Zahlen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen

Größen mit negativen Maßzahlen
 	
• negative Maßzahlen bei
  ○ Temperatur
  ○ Höhenlage
  ○ Wasserpegel
  ○ Kontostand
• Minus- und Pluszeichen als Vorzeichen
	Die Schülerinnen und Schüler
	• interpretieren Sachtexte, Tabellen und Diagramme, in denen negative Zahlen vorkommen,
	• begründen anhand von Sachkontexten die Notwendigkeit von negativen Zahlen,
	• veranschaulichen negative Maßzahlen an geeigneten Skalen,
	• beschreiben Zustände über bzw. unter einem festgelegten Normalzustand durch das Vorzeichen + bzw. –,
	• übersetzen verbale Formulierungen wie beispielsweise „Guthaben“ oder „Schulden“ in Größenangaben mit Vorzeichen,
	• interpretieren zeitliche Größenänderungen in Diagrammen (z.B. Temperaturverlauf an einem Wintertag, auch im Kontext BNE möglich).

11. Ganze Zahlen — Mathematik 5/6

Inhaltsbezogene Kompetenzen / Prozessbezogene Kompetenzen

Anordnung ganzer Zahlen

- Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden
- Vorgänger und Nachfolger ganzer Zahlen
- Vergleichsrelationen bei ganzen Zahlen

Die Schülerinnen und Schüler

- lesen ganze Zahlen an der Zahlengerade ab und zeichnen Zahlpunkte zu ganzen Zahlen ein,
- geben Vorgänger und Nachfolger ganzer Zahlen an,
- vergleichen zwei ganze Zahlen miteinander,
- ordnen bis zu vier ganze Zahlen der Größe nach,
- erläutern Widersprüche bei umgangssprachlichen Größenvergleichen (z.B. höhere Schulden, größere Tiefe).

Menge der ganzen Zahlen

- Positive und negative ganze Zahlen
- Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen
  $\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- Menge $\mathbb{Z}^+$ der positiven ganzen Zahlen
  $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; \dots\}$
- Menge $\mathbb{Z}^-$ der negativen ganzen Zahlen
  $\mathbb{Z}^- = \{\dots; -3;\ -2;\ -1\}$
- Einbettung der Menge $\mathbb{N}$ in die Menge $\mathbb{Z}$
  Symbol: $\mathbb{Z}_0^+$

Die Schülerinnen und Schüler

- ordnen Zahlen den Mengen $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ zu,
- stellen die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ bzw. exemplarische Teilmengen in Venn-Diagramm dar.

Erweiterung des Koordinatensystems

- negative Koordinaten
- Nummerierung der Quadranten
- erste und zweite Winkelhalbierende

Die Schülerinnen und Schüler

- geben die Koordinaten von Punkten in den vier Quadranten an,
- zeichnen Punkte mit vorgegebenen Koordinaten ins Koordinatensystem ein,
- spiegeln und verschieben Punkte im Koordinatensystem (auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge).

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
Addieren und Subtrahieren (Teil 1) • Addition einer natürlichen Zahl zu einer beliebigen ganzen Zahl als Hinzufügen • Subtraktion einer natürlichen Zahl von einer beliebigen ganzen Zahl als Vermindern	Die Schülerinnen und Schüler • veranschaulichen mithilfe des Pfeilmodells das Addieren einer natürlichen Zahl an der Zahlengerade, • veranschaulichen mithilfe des Pfeilmodells das Subtrahieren einer natürlichen Zahl an der Zahlengerade, • berechnen den Wert von Summen und Differenzen mit natürlichem zweitem Rechenglied, • geben das Vorzeichen des Wertes einer Summe bzw. einer Differenz an, ohne ihren Wert zu berechnen, • übersetzen verbal beschriebene Zustandsänderungen von Größen in einen Rechenterm, • ermitteln Anfangszustand, Veränderung oder Endzustand, wenn zwei dieser drei Angaben gegeben sind, • lösen elementare Gleichungen der Form $x \pm a = b$ $(a > 0)$ („Platzhalter-Aufgaben“ mit Variablen) mithilfe von Umkehroperationen, • lösen einfache Zahlenrätsel durch Umkehroperation.
Multiplizieren und Dividieren (Teil 1) • Multiplikation einer beliebigen ganzen Zahl mit einer natürlichen Zahl • Division einer beliebigen ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl ($\neq 0$)	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren ausgehend von Permanenzreihen die Regel für das Multiplizieren mit einer natürlichen Zahl, • formulieren ausgehend von Permanenzreihen die Regel für das Dividieren durch eine natürliche Zahl (ungleich 0), • berechnen den Wert von Produkten und Quotienten mit natürlichem zweitem Rechenglied, • lösen Sachaufgaben.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Prozessbezogene Kompetenzen
	Die Schülerinnen und Schüler • lösen elementare Gleichungen der Form $x \cdot a = b$ bzw. $x : a = b$ $(a > 0)$ („Platzhalter-Aufgaben“ mit Variablen) mithilfe von Umkehroperationen, • lösen einfache Zahlenrätsel durch Umkehroperationen.

Basisbegriffe

Ganze Zahl, negativ, positiv, Quadrant, Vorzeichen, Winkelhalbierende (erste, zweite), Zahlengerade

Vorschläge und Hinweise

Methodik und Fachdidaktik

- Bei der Arbeit mit dem Koordinatensystem sollte nicht nur mit isolierten Punkten, sondern auch mit Figuren gearbeitet werden.
- Das Pfeilmodell eignet sich, um die Addition einer natürlichen Zahl zu einer beliebigen ganzen Zahl am Zahlenstahl darzustellen (analog: Subtraktion).
  In der Klassenstufe 7 kann das Pfeilmodell auf den Fall der Addition bzw. Subtraktion einer negativen ganzen Zahl erweitert werden.
- Als weitere Möglichkeit der Einführung der Addition einer natürlichen Zahl zu einer beliebigen ganzen Zahl eignet sich das Schulden-Guthaben-Modell (analog: Subtraktion). Dieses Modell lässt sich leicht auf den Fall eines negativen zweiten Rechenglieds erweitern.
- Elementare Gleichungen können über Umkehroperationen gelöst werden.
- Als „Forscheraufgaben“ eignen sich beispielsweise das Erstellen magischer Quadrate, das Arbeiten mit Zahlenmauern (Erkunden und Ergänzen) oder das Verfassen von Zahlenrätseln.
- Mögliche Fragestellungen im Kontext BNE:
  - Recherche zu steigenden Temperaturen in der Arktis bzw. in der Antarktis infolge der Klimaerwärmung und Bestimmen von Temperaturänderungen innerhalb vorgegebener Zeiträume

Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

- digitale Rechentrainer
- Erstellen von Diagrammen mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen (z.B. Kontobewegungen oder Zu- bzw. Abnahme der Bevölkerung einer Stadt von Jahr zu Jahr)
- dynamische Geometriesoftware zur Arbeit mit Koordinatensystemen

Vorschläge und Hinweise

Fakultative Inhalte

- *Abzählbarkeit der ganzen Zahlen („Hilberts-Hotel“)*
- *Umrechnungstabelle zwischen Temperaturangaben in °Celsius und °Fahrenheit*
- *Alternierende Quersummen von natürlichen Zahlen*
- *Teilermengen von negativen ganzen Zahlen*

Thematische Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufen 5/6: Natürliche Zahlen,
- Klassenstufen 5/6: Rechnen mit natürlichen Zahlen
- Klassenstufe 7: Rationale Zahlen
- Klassenstufe 7: Terme, Gleichungen und Ungleichungen

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Höhenprofile, z.B. Jordangraben mit Totem Meer, Marianengraben
- Faustregel zur Abnahme der Lufttemperatur mit zunehmender Höhe

Anhang

Grundstock von Operatoren[i]

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

[i] KMK: Aufgaben für das Fach Mathematik – Grundstock von Operatoren. Berlin. 2019.