

# Das Rechteck

## – ein Leitmotiv im Mathematikunterricht der Klassenstufe 5

Inhaltliche Prägung durch zentrale Kompetenzen

Veränderte methodische Schwerpunktsetzungen

---

Anzahlen schnell bestimmen

Quadratzahlen / Dreieckszahlen / Pyramidenzahlen

Quadrate und Quadratzahlen

Summe (Reihe) der ungeraden Zahlen

Summe (Reihe) der natürlichen Zahlen

Das Rechteck als geometrische Figur

Rechteck und Kreis

Vorsicht Hund! Abstand halten!

Der Flächeninhalt des Rechtecks

Isoperimetrische Betrachtungen am Rechteck

Rechteck und Koordinatensystem

Rechteck und Bruchteile

Parkettieren bei Rechtecken

Euklidisches Parkettieren

# Inhaltliche Prägung durch zentrale Kompetenzen

<b>Lehrplan G 8 Klassenstufe 5</b>	<b>Zentrale Inhalte</b>	<b>Zentrale Kompetenzen</b>
1. Natürliche Zahlen	<b>Zahlen und Größen</b>	<b>Zählen</b>
1.1. Eigenschaften der natürlichen Zahlen	<b>Terme und Formeln</b>	<b>Vergleichen</b>
1.2. Rechnen mit natürl. Zahlen	<b>Aussagen und Aussageformen</b>	<b>Messen - Schätzen</b>
1.3. Grundbegriffe der Gleichungs- lehre	<b>Geometrische Figuren und Körper</b>	<b>Annähern - Mitteln</b>
1.4. Zählen und Darstellen	<b>Funktionen und Abbildungen</b>	<b>Fallunterscheiden</b>
2. Größen	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>Begriffe bilden</b>
2.1. Größen im Alltag	<b>Algorithmen und Kalküle</b>	<b>Modellieren - Interpretieren</b>
2.2. Bruchteile	<b>Beweis- und Argumentations- schemata</b>	<b>Optimieren</b>
3. Geometrische Grundbegriffe	<b>Strukturen und Symmetrien</b>	<b>Konstruieren</b>
3.1. Grund- bausteine		<b>Kalkulieren</b>
3.2. Betrachtungen am Rechteck		<b>Formalisieren</b>
4. Teilbarkeit		<b>Strukturieren</b>
		<b>Zuordnen</b>
		<b>Visualisieren</b>
		<b>Begründen</b>
		<b>Problemlösen</b>
		<b>Algorithmieren</b>
		<b>Stochastisches Arbeiten</b>
		<b>Medien nutzen</b>

# Veränderte methodische Schwerpunktsetzungen

Lehrplan G 8  
Klassenstufe 5

Zentrale Inhalte

Zentrale  
Kompetenzen

## Methodische Vorgehensweisen

**Aufbau angemessener Grundvorstellungen**

**Vernetzen der Inhalte**

**Querbezüge auch zu anderen Fächern**

**systematisches und immanentes Wiederholen**

**Möglichst durchgängige Verwendung  
situativer Kontexte / Alltagsbezug**

**Einbeziehen ergebnisoffener Aufgabenstellungen**

**Wiederentdecken enaktiver Elemente (H.Dabrock)**

# Anzahlen schnell bestimmen

## Aufgabe:

Lege 28 Gegenstände (z.B. Holzwürfel) so hin, dass eine andere Person leicht deren Anzahl ablesen kann.

## Zehnerblöcke:

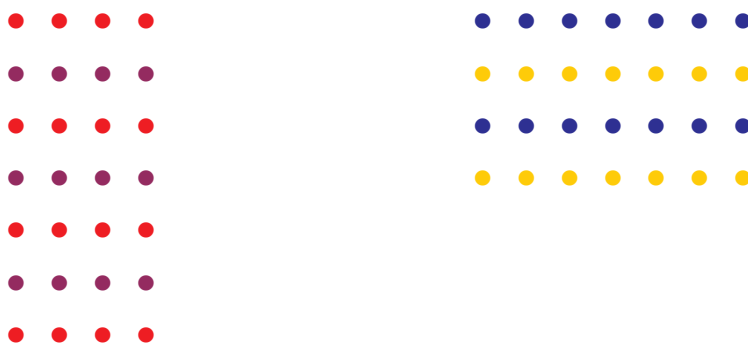


$$28 = 2 \times 10 + 8$$

LP: Dezimalsystem  
LP: Division mit Rest

ZK: Zählen  
ZK: Visualisieren

## Rechteckmuster:



$$7 \times 4 = 28$$

$$4 \times 7 = 28$$

LP: Kommutativität der Multiplikation  
LP: Tabellen als Zählhilfe

ZK: Strukturieren  
ZK: Visualisieren

Welche konkreten Rechteckmuster sind möglich?

Anzahl der Zeilen	1	2	4	7	14	28
Anzahl der Spalten	28	14	7	4	2	1

LP: Teiler  
ZI: Strukturen und Symmetrien

ZK: Strukturieren

# Quadratzahlen / Dreieckszahlen / Pyramidenzahlen

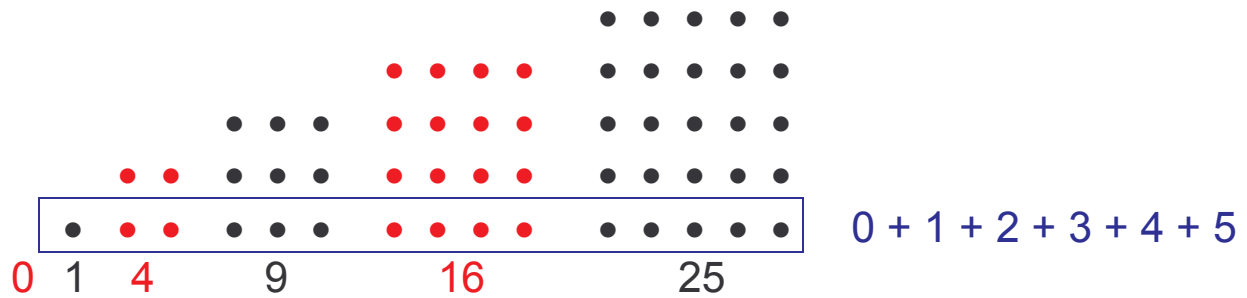
## Aufgabe:

Welchen Anzahlen ermöglichen besondere Anordnungsmuster?

ZI: Strukturen und Symmetrien

LP: Quadrat, (gleichseitiges) Dreieck

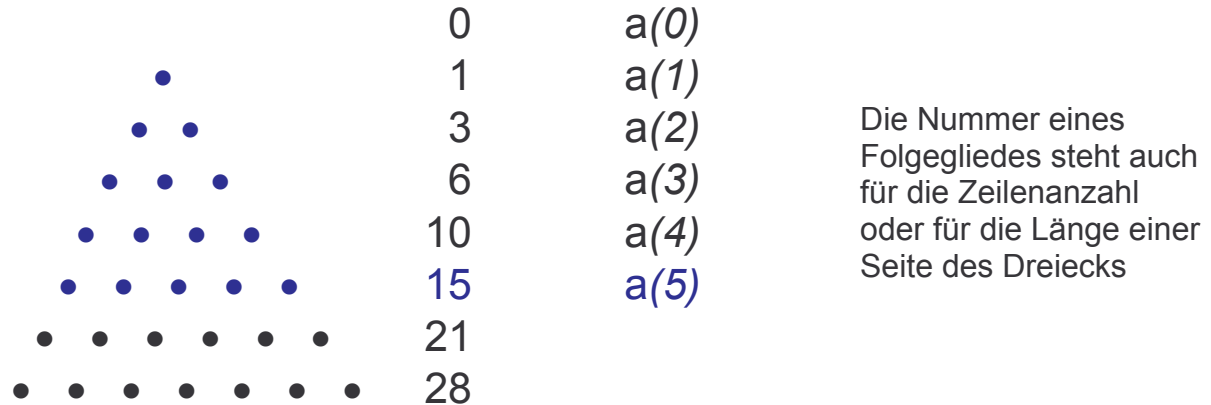
## Quadratzahlen:



LP: Zahlenfolgen  
LP: Quadratzahlen  
ZK: Begriffe bilden

LP: Rechenterme  
LP: Zuordnungen  
ZK: Problemlösen

## Dreieckszahlen:



iterative Beschreibung der Zahlenfolge  
(wenig formalisieren, viel verbalisieren !)

$$a(n) = a(n-1) + n$$

explizite Beschreibung der Zahlenfolge

$$a(n) = n \times (n+1) : 2$$

LP: Zahlenfolgen  
ZK: Begründen  
ZK: Problemlösen

LP: Rechenterme  
ZK: Begriffe bilden  
ZK: Visualisieren

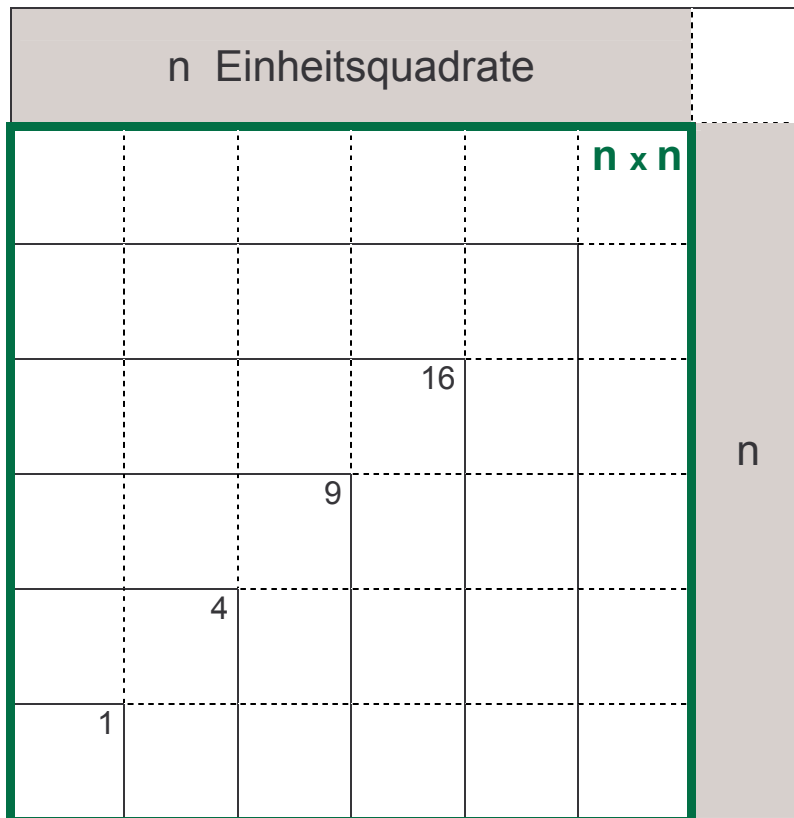
Gibt es (weitere) Zahlen, die sowohl Quadratzahlen als auch Dreieckszahlen sind?

0, 1, 36, 1225, 41616, ...

# Quadrate und Quadratzahlen

## Aufgabe:

Betrachte die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen.



Die **Differenzen** sind: 1, 3, 5, 7, 9, ... **ungerade nat. Zahlen**.

Oder anders betrachtet:  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1)$   
ergibt immer eine Quadratzahl

**Termgleichheit durch unterschiedliches Abzählen:**

$$(n+1) \times (n+1) = n \times n + \boxed{n + n + 1}$$

$$(n+1)^2 = n^2 + \boxed{2 \times n + 1}$$

ZI: Terme und Formeln

ZK: Visualisieren

LP: Potenzen

ZI: Folgen und Reihen

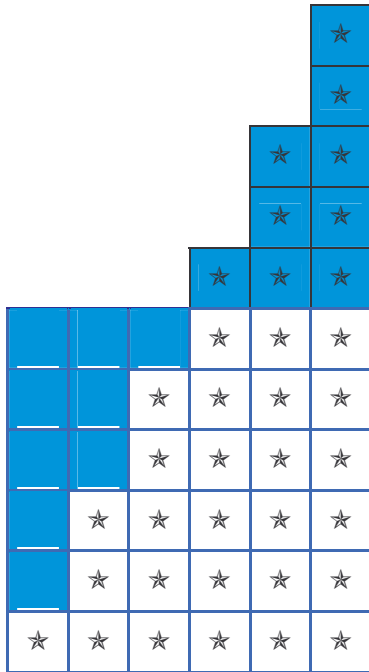
ZK: Zählen

iterative Beschreibung der Zahlenfolge  $a(n+1) = a(n) + 2n + 1$

explizite Beschreibung der Zahlenfolge  $a(n+1) = (n+1)^2$

→ Klassenstufe 8: erste binomische Formel

## Summe (Reihe) der ungeraden Zahlen



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

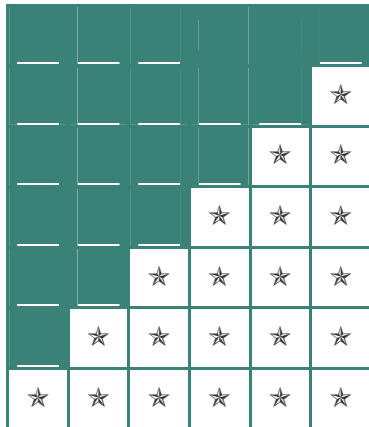
Die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen ergeben aufeinanderfolgend die ungeraden Zahlen.

Da 1 eine Quadratzahl und zugleich die kleinste ungerade Zahl ist, ist die bei 1 beginnende Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen immer eine Quadratzahl.

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

## Summe (Reihe) der natürlichen Zahlen

$$(6 \times 7) : 2 = 21$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Die **Dreieckszahlen** ergeben sich gemäß folgender Formel:

$$\sum_{i=1}^n i = n \times (n + 1) : 2$$

# Das Rechteck als geometrische Figur

## Aufgabe:

Baue aus vier Holzstäben ein Rechteck.

Baue aus drei Holzstäben ein Dreieck.

„Rechteck“ ist Synonym für Objekt und Abstraktum

## Probleme:

- manuelles Geschick
- Gestaltung der Eckverbindungen
- Festlegung der Länge der Holzstäbe
- ebene Figuren (!)
- Parallelität von Seiten
- Rechtwinkligkeit von Seiten



LP: Parallelität, Rechtwinkligkeit, Symmetrie

ZK: Problemlösen

ZK: Begriffe bilden

ZK: Messen – Schätzen

ZK: Vergleichen

ZK: Konstruieren

ZK: Modellieren und Interpretieren

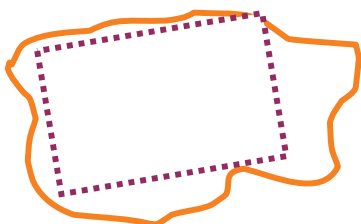
Stabilitätsbetrachtungen im Bauwesen (Fachwerke)

Symmetrien in der Architektur

Umkreis / Diagonalenlängen

## Aufgabe:

Falte aus einem Papierfetzen ein Rechteck.



### Wettbewerb:

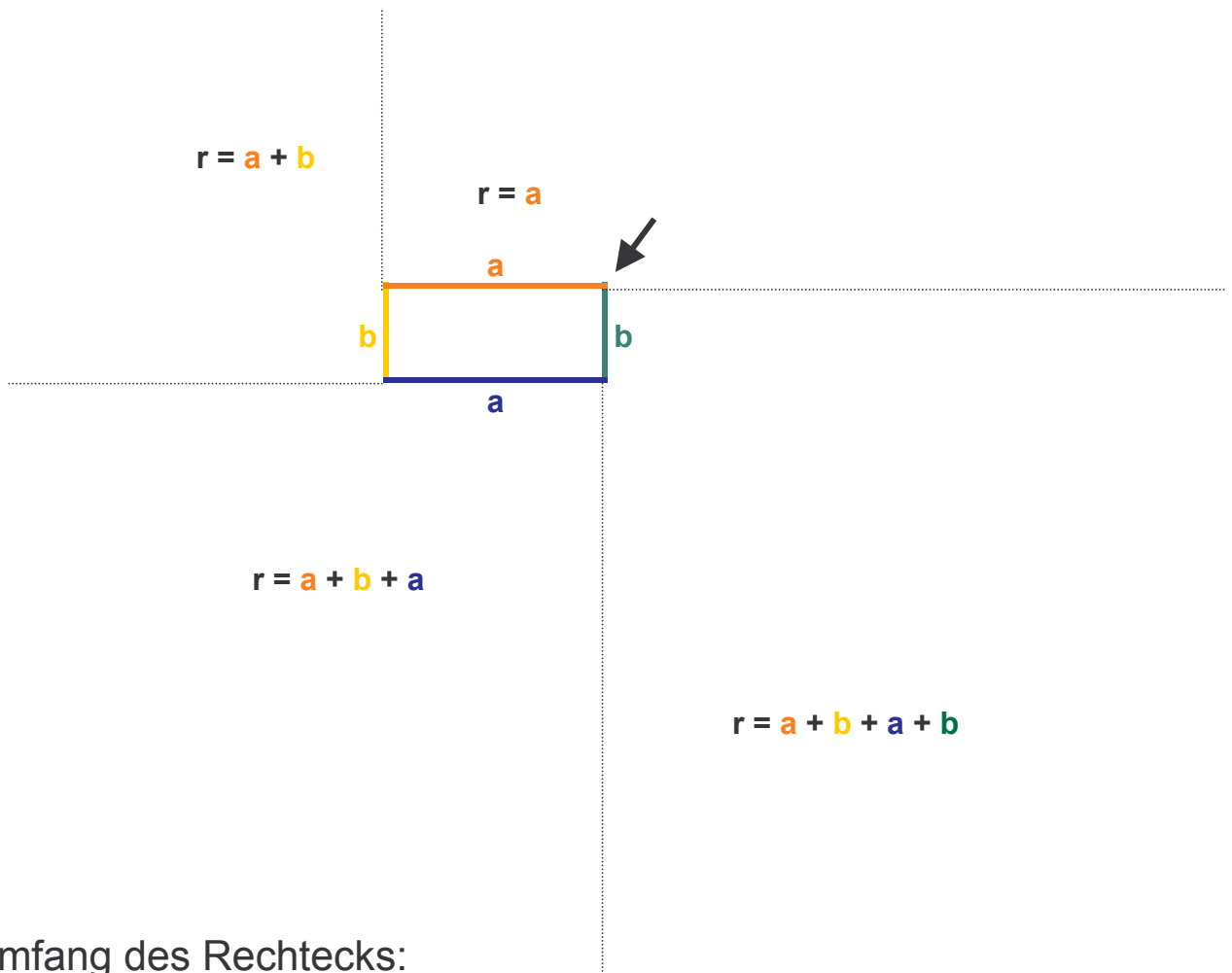
Wer erhält aus dem gegebenen Papierfetzen (Kopie) das Rechteck mit größtem Flächeninhalt?

# Rechteck und Kreis

## Aufgabe:

Wickle einen Faden um eine kleine Schachtel herum.

Binde an einer Ecke einen Stift an den Faden und wickle dann den Faden gestrafft ab. Zeichne dabei die Bahn des Stiftes auf.



## Umfang des Rechtecks:

$$U = a + b + a + b$$

$$U = 2a + 2b$$

$$U = 2 \times (a + b)$$

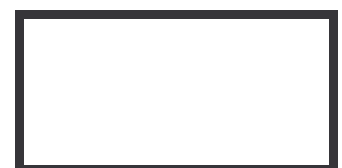
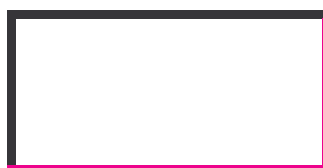
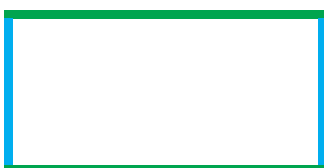
LP: Formeln für den Rechteckumfang

LP: Kommutativgesetz  $K^+$ , Distributivgesetz

ZK: Visualisieren

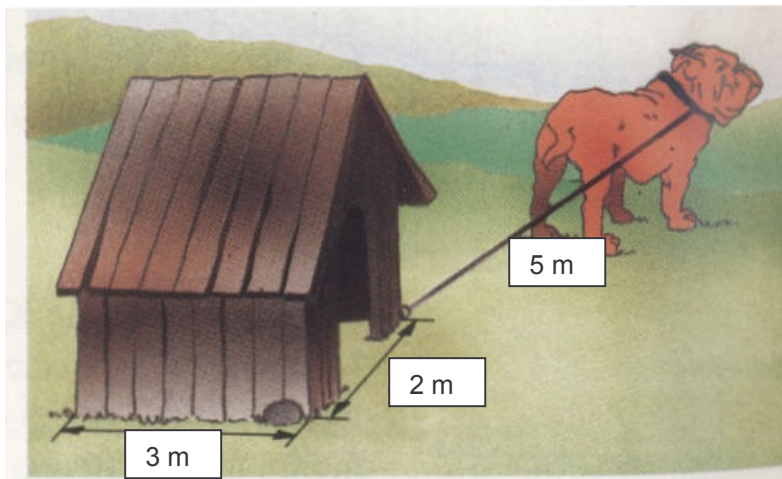
ZK: Begriffe bilden

ZI: Terme und Formeln



→ Klassenstufe 9: Spiralen

## Vorsicht Hund! Abstand halten!



Bello ist an der Ecke seiner Hundehütte mit einer Leine festgebunden.

0. Welcher Maßstab bietet sich für eine Zeichnung an?
1. Übertrage die abgebildete Situation so in ein Koordinatensystem, dass die Leine im Punkt  $B(6|6)$  befestigt ist!
2. Gib die Koordinaten der anderen Eckpunkte der Hundehütte an!  
 $C( \quad | \quad )$ ;  $D( \quad | \quad )$ ;  $E( \quad | \quad )$
3. Ein Fremder steht im Punkt  $F(3|2)$ .  
Wie weit ist der Fremde von Bellos Anbindepunkt  $B$  entfernt?
4. Bestimme den größt möglichen Abstand, den Bello und der Fremde voneinander haben können!  
Wo befindet sich Bello in diesem Falle?  $A( \quad | \quad )$
5. Wird Bello den Fremden erreichen? Zeichne und begründe!
6. An der Stelle  $G(2|4)$  steht eine Gartenlaterne.  
Kann Bello dort sein Bein heben? Zeichne und begründe!
7. Umrande den gesamten Bereich, den Bello erreichen kann, und färbe diese Fläche mit gelbem Buntstift ein.
8. Wie lang müsste Bellos Hundeleine sein, wenn er sowohl zu dem Fremden als auch zur Gartenlaterne gelangen soll?
9. Wie wäre der Sachverhalt bezüglich der Standorte  $F$  und  $G$ , wenn Bello an der Stelle  $B$  angebunden wäre, ohne dass eine Hundehütte vorhanden wäre?
10. Zum Geburtstag erhält Bello eine 6 m lange Leine geschenkt.

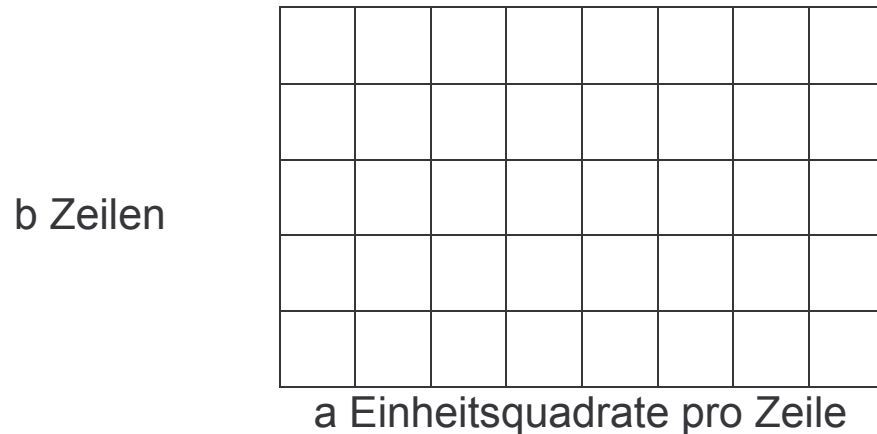
### Merke:

Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die in der Ebene von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben.

# Der Flächeninhalt des Rechtecks

## Definition:

Messen bedeutet zählen, wie oft die Maßeinheit enthalten ist.



$$A = a \times b \text{ Einheitsquadrate} \quad (a \text{ und } b \text{ sind Anzahlen})$$

$$A = a \times b \quad (a \text{ und } b \text{ sind Seitenlängen})$$

## Vereinbarung:

Größen werden multipliziert, indem man die Maßzahlen und die Maßeinheiten jeweils miteinander multipliziert.

Damit kommt dem Produkt allerdings noch keine sinnhafte Bedeutung zu.

LP: Fläche und Flächeninhalt  
ZK: Zählen  
ZK: Formalisieren  
ZI: Zahlen und Größen

LP: Messen von Größen  
ZK: Begriffe bilden  
ZK: Visualisieren  
ZI: Terme und Formeln

# Isoperimetrische Betrachtungen am Rechteck

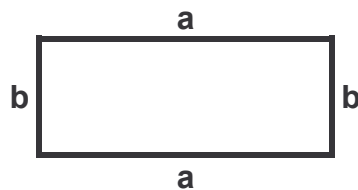
## Aufgabe:

Hobbygärtner Grünfinger will seinen  $196 \text{ m}^2$  großen rechteckigen Garten einzäunen. Sein Nachbar und Freund Schnellwachs hat für die Umzäunung seines Gartens  $56 \text{ m}$  Zaun benötigt.

**Wie viele Meter Zaun soll Herr Grünfinger kaufen?**

**Wer von beiden hat den größeren Garten?**

Ergebnisoffene Aufgabenstellung / Problemlösen



$$A = a \times b$$

$$U = 2 \times (a+b)$$

## Herr Grünfinger:

a in m			7	8	10	<b>14</b>							
b in m			28	24,5	19,6	<b>14</b>							
A in $\text{m}^2$	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>	<b>196</b>
U in m			70	65	59,2	<b>56</b>							

Je ... , desto ...

**Unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang.**

## Herr Schnellwachs:

a in m			11	12	13	<b>14</b>							
b in m			17	16	15	<b>14</b>							
A in $\text{m}^2$			187	192	195	<b>196</b>							
U in m	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>

Je ... , desto ...

**Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.**

LP: isoperimetrische Aufgaben  
 ZI: Geometrische Figuren und Körper  
 ZK: Problemlösen  
 ZK: Visualisieren

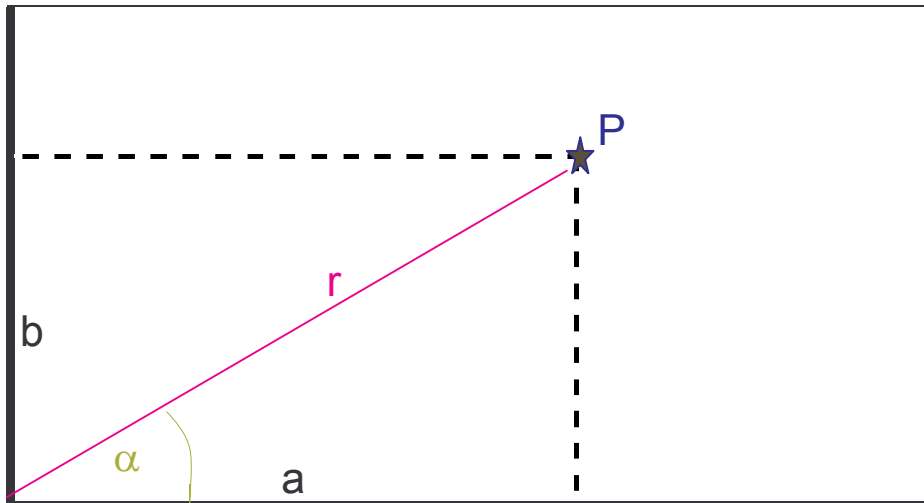
ZK: Vergleichen  
 ZK: Modellieren – Interpretieren  
 ZK: Optimieren  
 ZK: Annähern – Mittel

## Rechteck und Koordinatensystem

### Aufgabe:

Lege auf ein DIN A4-Blatt Papier ein kleines Steinchen.

Teile einer anderen Person die Lage des Steinchens so mit, dass sie das Steinchen genau an die gleiche Stelle legen kann.



### Vorgehensweise:

Ursprung festlegen

Achse(n) festlegen

LP: Punkte im Koordinatensystem

LP: Winkel messen und zeichnen

LP: Strecken messen und zeichnen

LP: Parallelität und Rechtwinkligkeit

ZK: Begriffe bilden

ZK: Modellieren – Interpretieren

ZK: Konstruieren

ZK: Messen – Schätzen

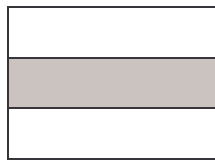
ZI: Funktionen und Abbildungen

→ Klassenstufe 9: Polarkoordinaten

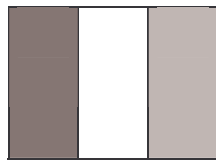
# Rechteck und Bruchteile

## Aufgabe:

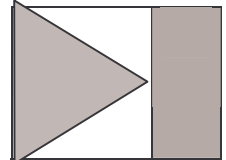
Entwerfe einige Muster für Flaggen und färbe sie mit höchstens vier Farben ein.



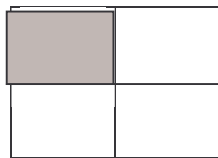
$$\frac{1}{3}$$



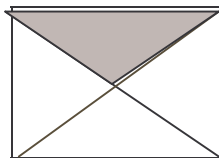
$$\frac{5}{9}$$



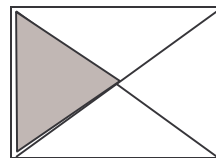
$$\frac{2}{3}$$



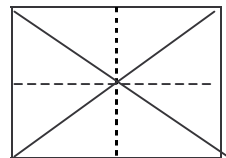
$$\frac{1}{4}$$



?



?

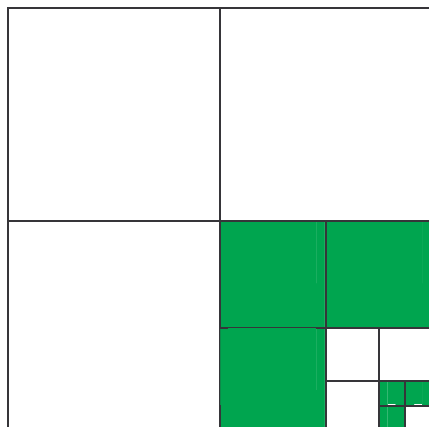


$$\frac{2}{8}$$

LP: Bruchteile von Größen  
 ZK: Begriffe bilden  
 ZK: Visualisieren  
 ZI: Strukturen und Symmetrien

LP: Erweitern und Kürzen  
 ZK: Vergleichen  
 ZI: Zahlen und Größen

## Erweiterung:

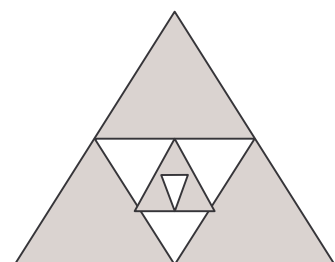


$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \dots = 1$$

## Der Griff nach dem Unendlichen ...

(unendlich viele, immer kleiner werdende Summanden)

ZK: Annähern - Mitteln



# Parkettieren bei Rechtecken

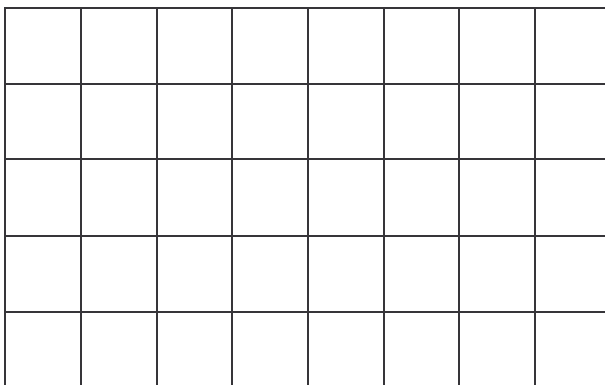
## Aufgabe:

Ein Raum von 52 dm Länge und 44 dm Breite soll im Schachbrettmuster mit einem Bodenbelag ausgelegt werden.

## Aufgabe:

Ein Grundstück von 52 m Länge und 44 m Breite soll eingezäunt werden. Dabei sollen die Zaunpfosten im gleichen Abstand gesetzt werden.

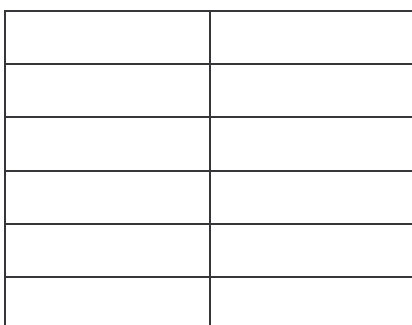
**ggT:** Auslegen eines Rechtecks mit möglichst großen gleichartigen Quadraten



$$\text{ggT}(a;b) = \text{ggT}(b;a)$$

durch Drehen der Figur

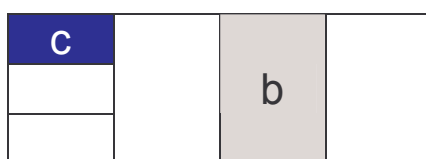
**kgV:** Auslegen eines möglichst kleinen Quadrates mit gleichartigen Rechtecken (im Karomuster).



$$\text{kgV}(a;b) = \text{kgV}(b;a)$$

durch Drehen der Figur

## Ergänzung:



$$c \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow c \mid a$$

(Transitivität)

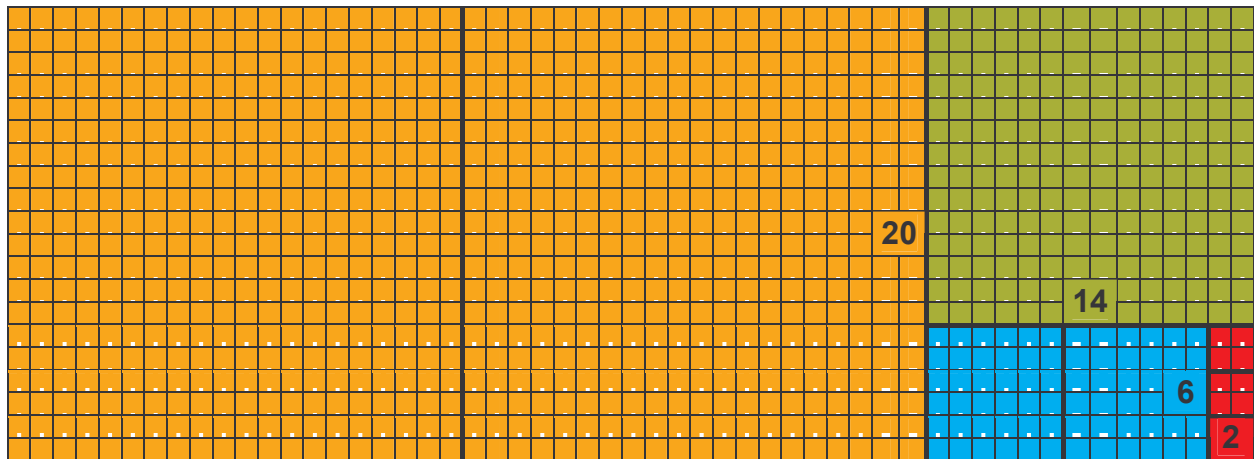
Mit der „Fliese“  $c$  lässt sich die „Gesamtfläche“  $a$  auslegen, weil ...

# Euklidisches Parkettieren

## Aufgabe:

Ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a = 54 \text{ cm}$  und  $b = 20 \text{ cm}$  soll mit möglichst großen Quadraten überdeckt werden.

Welche Besonderheit weist das kleinste dabei vorkommende Quadrat in Bezug auf die Gesamtfläche auf?



Fülle folgende Tabelle zum jeweiligen Überdeckungsschritt aus.

Schritt Nr.	Lange Rechteckseite	Kurze Rechteckseite	Anzahl der Quadrate	Restlänge
1	54	20	2	14
2	20	14	1	6
3	14	6	2	2
4	6	2	3	0

## Euklidischer Algorithmus!

Verfahre ebenso mit anderen Rechtecken,  
z.B. mit  $a = 38 \text{ cm}$ ,  $b = 14 \text{ cm}$

LP: ggT, euklidischer Algorithmus  
ZK: Visualisieren  
ZK: Algorithmieren  
ZK: Begründen

ZI: Algorithmen und Kalküle