Saarland
Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur

Gymnasiale Oberstufe Saar

Lehrplan Mathematik

G-Kurs

Juni 2008

Stand August 2011

MBKW G.B10 1.030 6/2008

LEHRPLAN MATHEMATIK FÜR DEN G-KURS DER GYMNASIALEN OBERSTUFE SAAR

Stoffverteilungsplan

G-Kurs, 1. Halbjahr der Hauptphase	4 Wochenstunden
verbindliche Inhalte	**Stunden**
1. Funktionen und ihre Termstrukturen	**13**
2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	**27**
fakultativ: Iteration von Funktionen, Stetigkeit der Verkettung, Mittelwertsatz, Krümmungsmaß, Schnittwinkel von Funktionsgraphen	

G-Kurs, 2. Halbjahr der Hauptphase	4 Wochenstunden
verbindliche Inhalte	**Stunden**
1. Flächeninhalte und Stammfunktionen	**13**
2. Integrale	**12**
3. *e*-Funktion und *ln*-Funktion	**15**
fakultativ: numerische Annäherung des Flächeninhaltes, uneigentliche Integrale mit endlicher Integrationsgrenze, Bogenlänge, logistisches Wachstum, beschränktes Wachstum, harmonische Schwingung, allgemeine Logarithmusfunktionen	

G-Kurs, 3. Halbjahr der Hauptphase	4 Wochenstunden
verbindliche Inhalte	**Stunden**
1. Vektoren	**17**
2. Vektorielle Untersuchung geometrischer Situationen	**15**
fakultativ: Teilverhältnisse in ebenen Figuren	

G-Kurs, 4. Halbjahr der Hauptphase	4 Wochenstunden
verbindliche Inhalte	**Stunden**
1. Wahrscheinlichkeiten	**15**
2. Zufallsgrößen	**13**
fakultativ: Tschebyschow-Ungleichungen, Normalverteilung	

Anmerkungen

1. Halbjahr des G-Kurses (11/1)

Im ersten Halbjahr des G-Kurses wird insbesondere die Behandlung der rationalen Funktionen weitergeführt; auch die allgemeine Sinusfunktion und die Wurzelfunktionen werden im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff thematisiert. Neben den bereits bekannten Verknüpfungen vergrößern das Verketten und das Umkehren das Funktionenrepertoire und eröffnen zahlreiche Anwendungsbezüge.

In der klassischen Kurvendiskussion wird mit Hilfe der Differenzialrechnung auf die Gestalt des Funktionsgraphen geschlossen. Die Bedeutung des mathematischen Kalküls tritt aufgrund der Verfügbarkeit graphikfähiger elektronischer Hilfsmittel in den Hintergrund, ohne dass auf die Begründung des Zusammenhangs zwischen dem Term und dem Graphen verzichtet werden kann. Interessant werden Details der Formgebung oft erst in Verbindung mit alltagsrelevanten Fragestellungen. Damit gewinnen neben dem Analysieren das Modellieren und das Interpretieren zunehmend an Bedeutung.

2. Halbjahr des G-Kurses (11/2)

Das Zusammenspiel von Änderungsraten und dem aktuellen Bestand von Größen in unterschiedlichen Situationen wirft Fragen nach Mittelwerten und Flächeninhalten bei Graphen auf. Derartige Fragestellungen bilden den Ausgangspunkt der Integralrechnung. Zentraler Gegenstand ist das Berechnen von Flächeninhalten und deren Interpretation in verschiedenen Kontexten. Im G-Kurs wird auf die Frage nach der Existenz von Flächeninhalten nicht eingegangen.

Der Integralbegriff wird in Anlehnung an die Riemann'sche Definition eingeführt, wobei auf die Behandlung der Integrierbarkeit verzichtet wird. Der Beweis zum Hauptsatz beschränkt sich daher auf den Nachweis, dass Integralfunktionen stetiger Funktionen Stammfunktionen sind.

Ausgehend vom exponentiellen Wachstum werden die *e*-Funktion und die *ln*-Funktion systematisch behandelt. Angesichts des Bedeutungsverlustes der klassischen Kurvendiskussion ist jedoch eine schematisierte Bearbeitung nicht angebracht. Vielmehr wird die isolierte Behandlung einzelner Funktionenklassen zu Gunsten kontextbezogener Anwendungen abgelöst.

Die *ln*-Funktion wird als Umkehrfunktion der *e*-Funktion definiert und bildet die Grundlage des Logarithmusbegriffs. Eine weitergehende Auseinandersetzung mit der Klasse der logarithmischen Funktionen ist nicht vorgesehen.

Die Bedeutung der Anwendungen der Integralrechnung neben den üblichen Flächenberechnungen spiegelt sich im vorgeschlagenen Zeitansatz wider. Das inzwischen reichhaltige Instrumentarium zum Modellieren wird z.B. bei der Beschreibung von Profilen und beim exponentiellen Wachstum eingesetzt. Anwendungsnahe Kontexte sollten sowohl bei der Erarbeitung mathematischer Begriffe, der Klärung von Zusammenhängen als auch zur Festigung und Verankerung des Gelernten hergestellt werden.

3. Halbjahr des G-Kurses (12/1)

Im Mittelpunkt steht die vektorielle Behandlung der analytischen Geometrie. Die Leitlinie dieses am Gedanken der Grundbildung orientierten Konzepts ist der enge Bezug zur Geometrie, der bereits bei der Einführung des Vektorbegriffs mit Hilfe von Translationen und der Entwicklung des Kalküls hergestellt wird. Dem entspricht der Verzicht auf Verallgemeinerungen und Vertiefungen, die im Rahmen von Untersuchungen zur Struktur des zugrundeliegenden Vektorraumes und bei der Präzisierung des Dimensionsbegriffs notwendig wären. Der Schwerpunkt des Unterrichts liegt auf metrischen Merkmalen und der Erfassung des mit der Alltagswelt korrespondierenden Anschauungsraumes. Die zu bearbeitenden Probleme unterscheiden sich auch im Schwierigkeitsgrad, in der Komplexität sowie in der Offenheit der Aufgabenstellung vom E-Kurs.

4. Halbjahr des G-Kurses (12/2)

Der Lehrplan des G-Kurses 12/2 setzt die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Klassenstufen 7 und 9 fort. Dazu werden die Grundeigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes präzisiert und das bereits bekannte Regelwerk zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erweitert. Im G-Kurs steht das Verständnis für die Zusammenhänge und die Anwendung der Gesetze bei konkreten Problemen im Vordergrund, nicht die Strenge der Deduktion.

Durch die Behandlung der Kenngrößen und Verteilungen diskreter Zufallsgrößen werden grundlegende Begriffe der Statistik eingeführt. Wegen ihrer Anwendungsrelevanz ist auch die Binomialverteilung Gegenstand dieses Kurses. Das Anspruchsniveau hat dem Grundbildungsauftrag Rechnung zu tragen.

Hinweis

Die Konzeption der Oberstufenlehrpläne orientiert sich an den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik“ (EPA).

Die **Reihenfolge** der Lernbereiche ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Sie nimmt die methodisch-didaktischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg. Anwendungen sollten soweit wie möglich in die einzelnen Lernbereiche integriert werden, auch wenn sie im Lehrplan gebündelt ausgewiesen sind.

Die **Vorschläge und Hinweise** im Lehrplan gehen von der durchgängigen Nutzung elektronischer Hilfsmittel aus. Bei eingeschränkter Verfügbarkeit dieser Hilfsmittel gewinnt das Einüben von Kalkülen eine größere Bedeutung.

In der Sekundarstufe I werden im Rahmen der **Bildungsstandards** sechs **Allgemeine mathematischen Kompetenzen** für die Auseinandersetzung mit Mathematik herausgestellt. Die Kompetenzen beschreiben die übergeordneten Ziele des Mathematikunterrichts und geben Anhaltspunkte für seine Gestaltung und Bewertung.

K1 Mathematisch argumentieren
K2 Probleme mathematisch lösen
K3 Mathematisch modellieren
K4 Mathematische Darstellungen verwenden
K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
K6 Kommunizieren

Die Schulung dieser Kompetenzen durchzieht nach ersten Ansätzen in der Primarstufe die Lernbereiche Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik der Sekundarstufe I und wird dann in den Lernbereichen Analysis, analytische Geometrie, lineare Algebra und Statistik der Sekundarstufe II weiterentwickelt. Hier bilden die „Allgemeinen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ den Rahmen, in den sich die Unterrichtsgegenstände und das Anforderungsprofil einfügen. Explizite Angaben einzelner Kompetenzen im Lehrplan weisen auf sich anbietende Schwerpunktsetzungen im Unterricht hin.

Mathematik, G-Kurs (1. Halbjahr)	
1. Funktionen und ihre Termstrukturen	**13 Stunden**

Nach einer Wiederholung der Potenzfunktionen und der Sinusfunktion schließen sich ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen an. Wichtige Eigenschaften dieser Funktionen lassen sich bereits ohne Differenzialrechnung aus den Untersuchungen der Nullstellen und des Grenzwertverhaltens ermitteln. Der Vorrat an Funktionen wird durch die bekannten Verknüpfungen wie das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sowie durch die vertrauten Abbildungen wie Strecken, Spiegeln und Verschieben erweitert. Mit dem Verketten und dem Umkehren von Funktionen stehen weitere wirkungsvolle Instrumente zur Verfügung.
Die Interpretation zusammengesetzter Funktionen als Hintereinanderausführung von Grundfunktionen strukturiert die entsprechenden Kalküle hinsichtlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Das Wechselspiel von Funktion und Umkehrfunktion samt Existenzfragen ist ein immer wiederkehrendes Muster nicht nur mathematischer Fragestellungen.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Wiederholen der Grundfunktionen	Lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion
• charakteristische Eigenschaften • einfache Verknüpfungen	
Ganzrationale Funktion	
• Definition des Begriffs der ganzrationalen Funktion	lineare und quadratische Funktionen als Sonderfälle
• Teilbarkeit von Polynomen	➔ Klassenstufe 9: Polynomdivision Teilbarkeit durch Linearfaktor (x–x_0), wenn x_0 Nullstelle ist (K5)
• maximale Anzahl von Nullstellen ganzrationaler Funktionen	Verlauf der Graphen in Abhängigkeit vom Grad
• Definition der Vielfachheit einer Nullstelle – $f(x)=(x-x_0)^k\cdot g(x),\ g(x_0)\neq 0$	*k*-fache Nullstelle
• Nullstellen geradzahliger Vielfachheit – lokale Extrempunkte auf der *x*-Achse	aus Wertetabelle und Vorzeichenbetrachtung heraus entwickeln
• Nullstellen ungeradzahliger Vielfachheit – Sattelpunkte auf der *x*-Achse	$k > 1$ aus Wertetabelle und Vorzeichenbetrachtung heraus entwickeln z.B. kubische Parabel ➔ Monotonie, Krümmung
• Skizzieren von Graphen ganzrationaler Funktionen mit vorgegebenen mehrfachen Nullstellen	Funktionsterme in faktorisierter Form vorgeben (K4)
• Erkennen der Vielfachheiten von Nullstellen bei Graphen und Aufstellen von Termen zu vorgegebenen Graphen	**fakultativ:** • Vielfachheit von x_0 mit $f(x_0) = c$ als Vielfachheit der Nullstelle von $f - c$, Extremstellenkriterium @ numerisches Überprüfen
Rationale Funktion	
• Definition der Begriffe der rationalen und der gebrochen rationalen Funktion	Kehrwertfunktion als Sonderfall
• eigentliche Grenzwerte	➔ Einführungsphase: Grenzwerte von Funktionen Möglichkeit des Wiederholens von Kalkülen und der Grundfunktionen
• Grenzverhalten ganzrationaler Funktionen für $x\to+\infty$ bzw. $x\to-\infty$	Leitexponenten und -koeffizienten bestimmen den Globalverlauf

Mathematik, G-Kurs (1. Halbjahr)	
1. Funktionen und ihre Termstrukturen	**13 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Grenzverhalten gebrochenrationaler Funktionen	keine behebbare Lücken
– uneigentliche (einseitige) Grenzwerte für $x \to x_0$ mit $x_0 \notin D$	keine Definitionen uneigentlicher Grenzwerte Verwenden des Symbols „lim“ Zerlegen von Zähler und Nenner gebrochen-rationaler Terme in Linearfaktoren (K5)
– Polstellen und Polgeraden	mit und ohne Vorzeichenwechsel
– Grenzverhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$	Polynomdivision bei unecht gebrochenrationalen Funktionen (K5)
– Asymptoten	insbesondere bei unecht gebrochen rationalen Funktionen
– Annäherungsverhalten an Asymptote	Beschränkung auf Asymptoten höchstens ersten Grades
• Skizzieren von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen, auch mit mehrfachen Nullstellen des Zählers und Nenners • Aufstellen von Termen zu vorgegebenen Graphen	(K4) Die charakteristischen Nullstellen- und Grenzwert-merkmale werden im Rahmen der Behandlung von Verknüpfungen von rationalen Funktionen mit *e*- und *ln*-Funktionen wieder aufgegriffen z.B. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ und $x \mapsto \frac{(x-1)}{ln(x^2)}$ (K2) @ Graphen mit elektronischen Hilfsmitteln (Problematisieren des Verhaltens bei Polstellen)
Verkettung von Funktionen	
• Definition – Bezeichnung: äußere und innere Funktion	Bedingung an Wertemenge und Definitions-menge im Verknüpfungsbereich beachten allgemeine Sinusfunktion oder quadratische Funktion in Scheitelpunktsform
• Symbolik $(g \circ h)(x) = g(h(x))$	Sprechweise: *g* nach *h*
• Nichtkommutativität	**fakultativ:** • Iteration von Funktionen • Stetigkeit der Verkettung
Umkehrfunktionen	können auch im Zusammenhang mit der Einführung der *ln*-Funktion behandelt werden ➔ 2. Halbjahr: *e*-Funktionen und *ln*-Funktion
• Symbolik f^{-1}	Abgrenzung zum Exponenten -1
• Umkehrbarkeit – Veranschaulichung am Graph	jede Parallele zur *x*-Achse schneidet den Graph in höchstens einem Punkt (K4)
– Monotonie als hinreichendes Kriterium für die Umkehrbarkeit	nicht notwendig, kontrastierend ist z.B. die Kehrwertfunktion
• Umkehrfunktionsterme	
• Graphen	Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden
• Verkettung von Funktion und Umkehrfunktion	Definitionsmenge je nach Reihenfolge: $f \circ f^{-1} = id_{W_f}$ bzw. $f^{-1} \circ f = id_{D_f}$

Mathematik, G-Kurs (1. Halbjahr)

2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen — 27 Stunden

Die klassische schematisierte Funktionsdiskussion hat angesichts der Verfügbarkeit graphikfähiger elektronischer Systeme an Bedeutung verloren. Damit einhergehend wird die isolierte Behandlung von Funktionen gemäß den Funktionenklassen aufgelöst, die Funktionsterme sind zunehmend durchmischt. Zu bearbeiten sind ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen sowie einfache Verknüpfungen mit der Sinusfunktion und der Wurzelfunktion. Dabei sollten allerdings die Sinusfunktion und die Wurzelfunktion nur zu einfachen Funktionstermen hinzugezogen werden. Die Methoden der Differenzialrechnung zur Ermittlung der Eigenschaften von Funktionen und des Verlaufs ihrer Graphen müssen – nach Bedarf mit CAS-Unterstützung – beherrscht werden.
Neben das Analysieren vorgegebener Kurven tritt auch das Modellieren von Kurven nach vorgegebenen Bedingungen gleichberechtigt hinzu.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Ableitungen	➔ Einführungsphase: Einführung in die Differenzialrechnung
• Ableitungsfunktion – globale Differenzierbarkeit	„glatter" Verlauf des Graphen Kontrastierung durch Betragsfunktionen
– Differenzierbarkeitsmenge D′	z.B. bei der Wurzelfunktion
– Symbolik $f'(x)$	
– Ableitung als Funktion $f': D' \rightarrow \mathbb{R}$	
– graphische Gegenüberstellung von Funktion und ihrer Ableitung	Skizzieren des Graphen der Ableitung bei vorgegebenem Funktionsgraph und umgekehrt
– Beweis: Differenzierbare Funktionen sind stetig	Widerlegung der Umkehrung Äquivalenz der Kontraposition des Satzes Begriffe „notwendig" und „hinreichend"
– Ableitung der Sinusfunktion mit *f(x) = sin(x)*	Veranschaulichen mit Hilfe der Graphen: $f'(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
– Kosinusfunktion und ihre Ableitung	$cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sin'(x)$
• Ableitungsregeln	@ auch Einsatz von CAS
– Faktorregel	➔ Wiederholung aus Einführungsphase
– Summenregel	➔ Wiederholung aus Einführungsphase
– Produktregel	Veranschaulichung am Zuwachs einer Rechteckfläche
– Quotientenregel	
– Kettenregel	$(g \circ h)'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$
	fakultativ: • Mittelwertsatz
• höhere Ableitungen	Verschwinden bei ganzrationalen Funktionen
Monotonie und Extrempunkte	einmal stetig differenzierbare Funktionen @ Erstellen der Ableitungsterme und Lösen auftretender Gleichungen mit CAS
• Monotonie und strenge Monotonie	➔ Klassenstufe 9: Definition der Monotonie, Monotonie von Potenzfunktionen ➔ Einführungsphase: Monotoniebegriff bei Folgen
• Monotoniekriterium – notwendige und hinreichende Bedingungen – Monotoniewechsel – Monotonieintervalle	

Mathematik, G-Kurs (1. Halbjahr)	
2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	**27 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Extrempunkte – Extremwert oder Extremum, Extremstelle – lokale und globale Extrema	
• Extremstellenkriterien – Beweis eines Kriteriums	
– $f'(x_0)=0$ als notwendige Bedingung im Innern von D’	z.B. kubische Parabel
– Vorzeichenwechsel von f' als hinreichende Bedingung	nicht notwendig, z.B. $f(x) = \begin{cases} 2\cdot x^2 + x^2 \cdot sin(\frac{1}{x}) & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$ auch anwendbar, wenn f in x_0 stetig, aber nicht differenzierbar ist
– $f'(x_0)=0 \;\wedge\; f''(x_0)\neq 0$ als hinreichende Bedingung	nicht notwendig
Krümmung und Wendepunkte	zweimal stetig differenzierbare Funktionen @ Erstellen der Ableitungsterme und Lösen auftretender Gleichungen mit CAS
• Krümmungsart	Links- bzw. Rechtskrümmung (K4)
– Monotonieverhalten der Ableitung	durch Koordinatensystem geprägtes Verständnis
– als Abweichungsverhalten von der jeweiligen Tangentenrichtung	innergeometrisch geprägtes Verständnis
• Krümmungskriterien	Übertragung der Monotoniekriterien z.B. bei $f(x) = x^2 + sin(x)$
– Krümmungswechsel – Krümmungsintervalle	➔ Klassenstufe 9: Graphen von Potenzfunktionen (K4)
• Wendepunkte	Punkte extremaler Steigung
– notwendige und hinreichende Bedingungen	bei zweimal bzw. dreimal differenzierbaren Funktionen Übertragen der Extremstellenkriterien
– Sattelpunkte	**fakultativ:** • Krümmungsmaß
Analysieren von Graphen und Funktionen	anhand des bekannten Vorrats von ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen sowie einfachen Verknüpfungen dieser Funktionen, auch mit der Sinusfunktion und der Wurzelfunktion
• charakteristische Eigenschaften	keine schematisierten „vollständigen“ Funktionsdiskussionen, jedoch breit gestreute Anwendung der dort benötigten Bausteine
• differenzialgeometrische Grundaufgaben	
– Aufstellen von Tangenten- und Normalengleichungen	nicht von Punkten außerhalb des Graphen ➔ Einführungsphase: Gleichungen der Tangenten
– Berechnen von Steigungswinkeln	**fakultativ:** • Schnittwinkel
• alltagsbezogene Extremwertaufgaben	(K3) Optimierungsprobleme in Geometrie, Wissenschaft und Wirtschaft Einbeziehung von Randuntersuchungen sowohl geometrisch als auch algebraisch dominierte Situationen

Mathematik, G-Kurs (1. Halbjahr)	
2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	**27 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Modellieren mit Hilfe von Graphen	Variieren zwischen systematischen Ansätzen und deren Auswertung sowie experimentellem Vorgehen @ Verwenden von Regressionsmenüs bei CAS
• Profile	Vasen, Gläser, Teile von Bauwerken (K3) Stilelemente in der Kunstgeschichte @ 3D-Darstellungen mit Hilfe von Zeichenprogrammen

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
1. Flächeninhalte und Stammfunktionen	**13 Stunden**

Die Vorüberlegungen zum Integralbegriff folgen dem didaktischen Konzept des Übergangs von der Änderung zum Bestand. Damit wird wie in der Differenzialrechnung die inhaltliche Bedeutung in den Mittelpunkt gestellt. Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Flächen- und Rauminhalten wird im G-Kurs nicht erörtert. Die untersuchten Punktmengen lassen sich mit Hilfe von Ausschöpfungen durch bekannte Flächenmaße erfassen.
Durch die Beschränkung auf stetige Funktionen über abgeschlossenen Intervallen kommt man mit den Begriffen Maximum und Minimum aus (die im Rahmen einer Verallgemeinerung durch die Begriffe Supremum und Infimum zu ersetzen wären). Die bereits bekannten Grundfunktionen sollten die Hauptrolle spielen.
Einen attraktiven Einstieg in die Thematik bieten Flächen unter Messkurven, denen eine anwendungsbezogene Bedeutung zukommt, wie etwa der Weg als Flächeninhalt unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve.
Der Schritt zum Stammfunktionsbegriff ist durch die Analyse von Flächeninhalten bei Graphen von Potenzfunktionen geleitet.

Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Von der Änderung zum Bestand	Beschränkung auf stetige Beispiele ➔ Lernbereich 2: Hauptsatz
• Anwendungsbeispiele	🗗 von Geschwindigkeit und Zeit zum Weg 🗗 von Kraft und Weg zur Arbeit 🗗 von Grenzkosten und Stückzahl zu Produktionskosten
– Sachbezogene Interpretation des Flächeninhaltes	Flächen zwischen Graph und *x*-Achse auch über Teilintervallen
• Flächeninhaltsbestimmungen	bei nichtnegativwertigen stetigen Funktionen ➔ Einführungsphase: Stetigkeitssätze
– Symbolik: $\mu(A)$	
– Abschätzungen mittels Rechtecken $(b-a)\cdot\min f \le \mu(A) \le (b-a)\cdot\max f$	zeichnerische Darstellungen (K4)
– Eingrenzungen mittels Treppenflächen $U(f;Z_1) \le \mu(A) \le O(f;Z_2)$	exemplarische Berechnungen für vorgegebene Zerlegungen
– Ober- und Untersummen	
– Bestimmung des Inhaltes der Fläche zwischen Normalparabel und *x*-Achse bei äquidistanter Zerlegung	Intervallschachtelung @ CAS-Einsatz **fakultativ:** • numerische Annäherung des Flächeninhalts
Stammfunktionen • Begriff der Stammfunktion – Definition: $D_F = D_f$ und $F'(x) = f(x)$	
– Symbole *F, G, ...*	Stammfunktionen tragen als Namen die den Funktionsnamen entsprechenden lateinischen Großbuchstaben
• Bildung von Stammfunktionstermen	@ Erstellen und Überprüfen mit CAS Umkehrung von Ableitungsregeln Kontrolle der Stammfunktionen durch Ableiten
– Potenzregel	Nichtanwendbarkeit bei der Kehrwertfunktion
– Summenregel	
– Faktorregel	
– Lineare Substitution $h(x)=f(\alpha\cdot x+\beta)$ mit $H(x)=\frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha\cdot x+\beta)$	(K5)

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
1. Flächeninhalte und Stammfunktionen	**13 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Eindeutigkeit der Stammfunktion über Intervallen bis auf additive Konstanten	ohne Beweis Kontrastierung, z.B. durch Bestimmung aller Stammfunktionen zu $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
• Existenz von Stammfunktionen bei stetigen Funktionen	ohne Beweis z.B. die Existenz von Stammfunktionen zu $x \mapsto \frac{1}{x}$ Wiederholung des Stetigkeitsbegriffs

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
2. Integrale	**12 Stunden**

Der auf der Riemann'schen Definition basierende Integralbegriff wird auf stetige Funktionen über abgeschlossenen Intervallen [a;b] eingeschränkt. Als fundamentaler Satz stellt der Hauptsatz die Verbindung zur Differenzialrechnung her und ermöglicht das Berechnen von Integralen durch das Aufsuchen von Stammfunktionen. Die dabei anzuwendenden Regeln sind direkte Folgerungen aus dem Hauptsatz und den Ableitungsregeln. Bei schwierigen Integrationen vertraue man auf den Einsatz von Computeralgebrasystemen, jedoch sollte die Bedeutung von Integrationsregeln für die Arbeitsweise dieser Systeme hervorgehoben werden. Die Behandlung der numerischen Integration ist nur bei Verfügbarkeit von Taschencomputern sinnvoll.
Über Flächeninhalte als Bestandsgrößen in Diagrammen lassen sich vielfältige Bezüge zu unterschiedlichen Sachgebieten herstellen. Darüber hinaus ist die grundlegende Bedeutung des Integralbegriffs für die Definition von Mittelwerten hervorzuheben. Den Abschluss des Kapitels bilden Modellierungen, die sich des Differenzial- und Integralkalküls bedienen.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Integralbegriff für stetige Funktionen	
• Untersumme $U_n=U(f;Z)$, Obersumme $O_n=O(f;Z)$ bei äquidistanter Zerlegung Z von [a;b] in n Teilintervalle	Wiederaufgreifen der Begriffe aus dem Lernbereich 1 Die nicht notwendige Beschränkung auf Äquidistanz vereinfacht die Untersuchungen @ Berechnen und Darstellen mit elektronischen Hilfsmitteln
• Gleichheit des Grenzwerts der Unter- und Obersummen bei einer beliebigen Folge unbegrenzt feiner werdender äquidistanter Zerlegungen	ohne Beweis, exemplarischer Nachweis z.B. mit Potenzfunktionen
• Definition des Integrals als gemeinsamer Grenzwert der Unter- und Obersummen bei einer Folge unbegrenzt feiner werdender äquidistanter Zerlegungen: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$	Interpretation als Summation infinitesimaler vorzeichenbehafteter Teilflächeninhalte (K6) Bernhard Riemann (1826-1866) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
• Berechnung von Integralen	Summation oder Rückführung auf Flächeninhaltsfunktionen und Stammfunktionen
• Erweiterung des Integralbegriffs	
– Gleichheit der Integrationsgrenzen $\int_a^a f(t)\,dt = 0$	als Definition
– Vertauschung der Integrationsgrenzen $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$	als Definition
Integralfunktionen	Zusammenhang mit orientierten Flächen
• Definition: I_c: $[a; b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$ mit $c \in [a;b]$	Integrationsvariable neu benennen

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
2. Integrale	**12 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Hauptsatz: Wenn f: $[a; b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist für jedes $c \in [a;b]$ die Integralfunktion I_c: $[a; b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f	Beweis ohne Nachweis der Existenz des Integrals (K1) die Umkehraussage ist falsch, weil Stammfunktionen stets um beliebige additive Konstanten abgeändert werden können Gegenbeispiel: $f(x)=x$ *und* $F(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+1$
– Folgerung: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a) = [F(t)]_a^b$	
• explizite und implizite Darstellungen von Stammfunktionen	z.B. Kehrwertfunktion als Integrand ➔ Lernbereich 3: *ln*-Funktion
Eigenschaften des Integrals	
• Linearität $\int_a^b (\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t))\,\mathrm{d}t$ $= \alpha\cdot\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\cdot\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$	(K4), (K6) kann zum Beweis in Funktionenadditivität und Proportionalität aufgesplittet werden
• Intervalladditivität $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$	(K4), (K6)
Uneigentliche Integrale	
• Integrationsgrenzen $+\infty$ oder $-\infty$ – Definition $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{z\to+\infty}\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$	(K4), (K6) analog für untere Grenze Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken
	fakultativ: • Integration mit Integrationsgrenze $b \in \mathbb{R} \setminus D$
Bestandsgrößen in Diagrammen	@ Bearbeitung der anstehenden Lösungsschritte mit CAS
• Flächeninhaltsbestimmungen an Graphen	rationale und trigonometrische Funktionen; Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen (K3)
– zwischen Graphen und der x-Achse	🗗 Weglänge im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, z.B. $s([t_1;t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$ 🗗 Arbeit im Kraft-Weg-Diagramm, z.B. $W([r_1;r_2]) = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Zentralfeld
– zwischen zwei Graphen	**fakultativ:** • Bogenlänge von Kurven

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
2. Integrale	**12 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Mittelwertbestimmungen an Graphen	elektrische Leistung an ohmschen Widerständen bei Wechselstrom: Mittelwert bei $x \mapsto sin^2(x)$
– $\overline{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Mittelwertbegriff im Kontinuum
– Mittelwertparallele	Ausgleich der Flächeninhalte ober- /unterhalb der Mittelwertparallelen (K4)

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)

3. *e*-Funktion und *ln*-Funktion — 15 Stunden

Ausgehend von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen und dem auf reelle Exponenten erweiterten Potenzbegriff werden zunächst Eigenschaften der Exponentialfunktionen untersucht. Die Proportionalität der Ableitungen zu den Funktionswerten führt zum Sonderfall der Gleichheit von Ableitung und Funktion und somit zur *e*-Funktion. Die *ln*-Funktion und die *e*-Funktion sind sowohl innermathematisch wie auch in vielen Anwendungsbereichen von großer Bedeutung. Ihre Funktionaleigenschaften spiegeln sich in den Rechengesetzen für Potenzen und Logarithmen wieder.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Exponentielles Wachstum	➔ Einführungsphase: Wachstumsprozesse geometrische Folge $a_n = a_0 \cdot q^n$
• Beispiele	Kapitalentwicklung mit und ohne Zinseszins, Modelle der Bevölkerungsentwicklung, radioaktiver Zerfall, Abnahme des Blutalkoholgehaltes (K3)
• charakteristische Merkmale – Quotientengleichheit – Grenzwertverhalten	Kontrastierung zum linearen Wachstum: multiplikative versus additive Änderung der Größe bei gleicher Zunahme der Argumente, Änderungsraten konstant versus proportional zum Bestand
• Potenzen mit reellen Exponenten	➔ Klassenstufe 9: Potenzen exemplarische Intervallschachtelungen zu b^x @ Einsatz von Tabellenkalkulation Übernahme der Rechengesetze
• Eigenschaften der Funktionen: $x \mapsto b^x$, D=ℝ • Differenzierbarkeit – Beweis: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}\right) = b^x \cdot f'(0)$ Differenzierbarkeit an der Stelle 0 wird vorausgesetzt, Ableiten durch Strecken in *y*-Richtung @ Berechnung von $f'(0)$ für versch. Basen Wahl der speziellen Folge $n \cdot (b^{\frac{1}{n}} - 1)$ zur Berechnung von Näherungswerten von $f'(0)$
***e*-Funktion** • Definition der eulerschen Zahl *e* $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}72$	*e* als Basis der Exponentialfunktion mit $f'(0) = 1$ Leonhard Euler (1707-1783) $n \cdot \left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
• Definition der *e*-Funktion mit $x \mapsto e^x$	alternative Bezeichnung: *exp*(*x*)
• Eigenschaften der *e*-Funktion – Monotonie und Krümmung	Anwenden der Kriterien ➔ 1. Halbjahr: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen
– Grenzwerte – Graph • zusammengesetzte Funktionen mit Beteiligung der *e*-Funktion	
– Quotienten, Produkte und Verkettungen mit ganzrationalen Funktionen	z.B. Gaußfunktionen mit $x \mapsto a \cdot e^{-k\cdot(x-u)^2}$ ➔ 4. Halbjahr: Binomialverteilung
– Grenzwerte von $x^n \cdot e^{c\cdot x}$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$	@ Hinauszoomen der Graphen zur Darstellung des Grenzwertverhaltens

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)

3. *e*-Funktion und *ln*-Funktion **15 Stunden**

Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
***ln*-Funktion**	
• Definition	als Umkehrfunktion der *e*-Funktion Kleinscher Weg der Einführung der *ln*-Funktion: $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ als Alternative zum vorliegenden Lehrplan (K5)
• Eigenschaften – Differenzierbarkeit und Ableitung	➔ fakultativ im 1. Halbjahr: Ableitungsregel für die Umkehrfunktion Die Differenzierbarkeit und der Ableitungsterm ergeben sich durch Anwenden der Kettenregel: $ln(e^x) = x \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ln(e^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x$ $\underset{y=e^x}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} ln(y) \cdot e^x = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} ln(y) = \frac{1}{y}$
– Stammfunktionen	$F(x) = x \cdot ln(x) - x$
– Monotonie und Krümmung – Nullstelle 1	Folgerungen aus Eigenschaften der *e*-Funktion
– Funktionaleigenschaften $ln(x_1 \cdot x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$ $ln(x^r) = r \cdot ln(x)$	Folgerungen aus der Funktionaleigenschaft der *e*-Funktion bzw. aus den Potenzgesetzen
– Folgerung: $b^x = e^{x \cdot ln(b)}$	
– Grenzwerte für $x \to +\infty$ und für $x \to 0^+$	Zurückführen auf Grenzwerte der *e*-Funktion oder Symmetriebetrachtung und Abschätzungen am Graph der Kehrwertfunktion
– Wertemenge	
• zusammengesetzte Funktionen – Quotienten, Produkte und Verkettungen mit ganzrationalen Funktionen bis zum Grad 2	
– Grenzwerte von $x^n \cdot ln(x)$ für $x \to +\infty$	@ Hinauszoomen der Graphen zur Darstellung des Grenzwertverhaltens
– Stammfunktionen zu $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$F(x) = ln(\lvert g(x) \rvert)$
Logarithmusbegriff	(K4), (K5)
• Logarithmusbegriff – $log_b(x)$ als Lösung von $b^y = x$ – $log_b(1) = 0$ – $\log_b(b) = 1$	Beschränkung auf Basen $b > 1$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) Eindeutigkeit der Lösung thematisieren
– $ln(x) = log_e(x)$ – $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$	aus den Funktionaleigenschaften der *ln*-Funktion ergeben sich hieraus die Logarithmengesetze
	fakultativ: • allgemeine Logarithmusfunktion mit $x \mapsto log_b(x)$

Mathematik, G-Kurs (2. Halbjahr)	
3. *e*-Funktion und *ln*-Funktion	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Modellieren von exponentiellen Wachstumsprozessen – Differenzialgleichung $f'(x) = k \cdot f(x)$ – Anwendungsaufgaben	Begriff „Wachstum“ schließt den „Zerfall“ ein 🗗 radioaktiver Zerfall **fakultativ:** • beschränktes Wachstum • logistisches Wachstum • harmonische Schwingung

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)

1. Vektoren — 17 Stunden

Im Unterricht erfolgt der Zugang zu Vektoren auf klassische Weise durch Translationen. Die Veranschaulichung der Vektoren als Pfeile, welche wiederum die Translationen repräsentieren, erhebt nicht den Anspruch, ein Modell für weitergehende Interpretationen zu liefern. Im Vordergrund stehen die Beziehungen zwischen den neuen Objekten.
Im vorliegenden Lernbereich geht es um das Bereitstellen und den rechnerischen Umgang mit dem neuen Kalkül. Ein formales Rückführen auf das Rechnen mit reellen Zahlen ist nicht vorgesehen. Bezüge zu realen Situationen sind anzustreben.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Punkte im Anschauungsraum	
• Punkte als geometrische Grundbausteine	Auffassung des Raumes als Punktmenge
– Symbole A, B, C, ... , P, Q, …	
– Anschauungsraum E^3	euklidischer Abstandsbegriff
• kartesisches Koordinatensystem	René Descartes (1596–1650)
– Dimensionalität	➔ Klassenstufen 5 und 6: Koordinatensysteme
– paarweise orthogonale Achsen	
– Rechtssystem	Dreifingerregel der rechten Hand 🗗 Lorentzkraft
• Punkte und ihre Koordinaten	umkehrbar eindeutige Zuordnung
– Koordinatentripel	Koordinatenquader (K4)
– Symbolik $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$	Einbettung von E^2 in E^3
– Sprechweise: Koordinaten eines Punktes	
– Darstellung im Schrägbildverfahren	Hilfslinien zum Ablesen von Koordinaten, z.B. Punkt als Eckpunkt eines Koordinatenquaders, Problem der Nichteindeutigkeit @ 3D-Visualisierungen
Translationen als Vektoren	
• Translationen in verschiedenen Kontexten	Bewegungen von Figuren bei Brettspielen, von Körpern im Raum, von Graphen ➔ Klassenstufe 7: Symmetrie durch Verschiebung (Bandornamente) 🗗 vektorielle physikalische Größen
• Pfeildarstellung	unendlich viele parallele, gleich lange Pfeile mit gleicher Orientierung ➔ Klassenstufe 6: Darstellung einer rationalen Zahl durch unendlich viele Brüche
– Symbol $\overrightarrow{PP'}$	unendlich viele Paare von Punkten mit gleicher Differenz der Koordinaten Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung
• Ortsvektoren	
– Definition	Translation, die den Ursprung auf A abbildet
– Symbolik $\overrightarrow{OA}$ oder auch $\vec{a}$	umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Punkt und Ortsvektor die Koordinaten des Punktes sind die Komponenten des Ortsvektors der Pfeil für $\overrightarrow{OA}$, im Ursprung angetragen, endet in A
• Komponentendarstellung	(K4)
– Sprechweise: Komponenten eines Vektors	
– Symbol $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$	mit den Komponenten $a_i = p_i' - p_i$
– Einbettung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$	dritte Vektorkomponente 0 setzen

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)

1. Vektoren — 17 Stunden

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
• Bezeichnung Vektor – Symbol $\vec{a}$	Identifikation: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$
• Nullvektor als Translation $\overrightarrow{PP}$	entartete Pfeile
– Symbol $\vec{0}$	$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
• Gegenvektor als Umkehrtranslation	$\vec{a}=\overrightarrow{PP'}$, $-\vec{a}=\overrightarrow{P'P}$
– Symbol $-\vec{a}$	Bedeutungen des Minuszeichens
• Addition von Vektoren als Hintereinanderausführung von Translationen	Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
– Symbolik $\vec{a}+\vec{b}$	neue Bedeutung des Pluszeichens
– im Pfeilbild: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$	Aneinanderfügen von Pfeilen, Parallelogrammdiagonale
– als komponentenweise Addition	Kräfteparallelogramm
– Kommutativität und Assoziativität	Veranschaulichen durch Wege am Parallelogramm bzw. am Spat
• Subtraktion als Addition des Gegenvektors	neue Bedeutung des Minuszeichens ➔ Klassenstufe 6: Subtraktion ganzer Zahlen Pfeil des Differenzvektors erstellen Darstellen von Vektoren in Körpern als Summen und Differenzen von Kantenvektoren
• S-Multiplikation als Vervielfachung einer Translation	➔ Klassenstufe 9: zentrische Streckung Konstruktion der Pfeile durch zentrische Streckung
– Symbolik $\lambda\cdot\vec{a}$	neue Bedeutung des Malzeichens Veranschaulichen in Pfeilbildern Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
– als komponentenweise Multiplikation	Anwenden der Strahlensätze
– gemischte Assoziativität $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}$	(K5)
– zwei Arten von Distributivität $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$	komponentenweises Nachrechnen Folgerungen: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (Unitarität); $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$
– Kollinearität zweier Vektoren	Parallelität der Pfeile; $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$ bzw. $\vec{a}=\mu\cdot\vec{b}$ Sonderfall: Der Nullvektor ist kollinear zu jedem Vektor ➔ Lineare Abhängigkeit
Euklidischer Vektorraum	
• Definition des Betrags eines Vektors	Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
– Symbolik: $\left\lvert\vec{a}\right\rvert$	
– $\left\lvert\vec{a}\right\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$	Diagonalenlänge eines Koordinatenquaders ➔ Klassenstufe 8: Satz von Pythagoras
– Verträglichkeit mit dem Zahlenbetrag $\left\lvert\lambda\cdot\vec{a}\right\rvert=\lvert\lambda\rvert\cdot\left\lvert\vec{a}\right\rvert$	(K5)
– Normieren von Vektoren: $\vec{a}^{\,0}=\frac{1}{\left\lvert\vec{a}\right\rvert}\cdot\vec{a}$	Kennzeichnung durch hochgestellte 0

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)

1. Vektoren — **17 Stunden**

Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Länge einer Strecke: $\left\|\overline{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$	Betrag der Translation $\overrightarrow{PQ}$
• Winkel zwischen zwei Vektoren	
– Definition als geometrisches Objekt	
– Berechnung über den Kosinussatz	mit konkreten Zahlen bzw. Koordinaten
• Standardskalarprodukt zweier Vektoren	Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
– Definition: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	
– Symbolik: $\vec{a} \bullet \vec{b}$	(K5)
– Kommutativität: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$	Rückführen auf die Rechengesetze in $\mathbb{R}$
– Distributivität: $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$	
– Verträglichkeit mit der S-Multiplikation: $\lambda \cdot \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$	Frage nach der Assoziativität von • nicht sinnvoll
– Betragsformel $\left\|\vec{a}\right\|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$	
– Winkelformel $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot cos(\varphi)$	Arbeitsbegriff der Physik
• Orthogonalität zweier Vektoren	
– Definition über $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$	
– Sonderrolle des Nullvektors	
– paarweise Orthogonalität dreier Vektoren	Aufspannen eines Quaders $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{c} \bullet \vec{a} = 0$
• Vektorprodukt	Synonym: Kreuzprodukt Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Definition nur im $\mathbb{R}^3$ möglich
– Symbolik $\vec{a} \times \vec{b}$	(K5)
– Definition: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$	Einstieg über die gleichzeitige Orthogonalität zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zyklisches Vertauschen der Indizes
– Orthogonalität zu den Faktoren	
– Antisymmetrie $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	
– Rechtssystem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$	Dreifingerregel der rechten Hand Lorentzkraft Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)
– Verträglichkeit mit der S-Multiplikation	
– Betrag des Vektorprodukts $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot sin(\varphi)$	Rechnen mit Komponenten und Verwendung von $sin^2(\varphi) = 1 - cos^2(\varphi)$
– Flächeninhalt eines Parallelogramms	
– Kollinearitätskriterium $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$	

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)	
1. Vektoren	**17 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Spatprodukt – Definition als $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}$	Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Berechnungsregel von Sarrus Pierre Frédérique Sarrus (1798-1861)
– Volumen des aufgespannten Spats $V = \left\|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}\right\|$	mit zyklischer Vertauschbarkeit der Vektoren
– Volumen der dreiseitigen Pyramide	$V = \frac{1}{6} \cdot \left\|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}\right\|$
– Komplanarität dreier Vektoren	Parallelität aller drei Pfeile zur selben Ebene; $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$ bzw. $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{c}$ bzw. $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ Bezüge zur Kollinearität herstellen Verallgemeinerung: lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit (K5)
– Komplanaritätskriterium $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c} = 0$ – Sonderrolle des Nullvektors	

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)	
2. Vektorielle Untersuchung geometrischer Situationen	**15 Stunden**
Der Euklidische Raum ist ein einfaches mathematisches Modell des Anschauungsraumes. In diesem Lernbereich sollen die mathematischen Hilfsmittel erweitert und bei der Bewältigung anwendungsbezogener Fragestellungen im dreidimensionalen Raum eingesetzt werden. Die Auszeichnung eines festen Punktes als Ursprung des Koordinatensystems und die Zuordnung zwischen Ortsvektoren und Punkten ist Grundlage der vektoriellen Behandlung der Lage von Punkten und ihrer Beziehungen. Angesichts der Beschränktheit der Punktmengen in Körpern gewinnen die Definitionsbereiche der Parameter in den Darstellungen von Strecken und Flächen gegenüber dem traditionellen Ansatz mit Geraden und Ebenen an Bedeutung.	

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Linearkombination von Vektoren	
• Linearkombinationen von Vektoren	@ Einsatz elektronischer Hilfsmittel **fakultativ:** • Teilverhältnisse in ebenen Figuren
Geometrische Grundobjekte	@ Einsatz eines 3D-Plotprogramms
• Mittelpunkt einer Strecke $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$	
• Geraden	(K4)
– Punktrichtungsgleichung: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$	Parametergleichung mit passendem Parameterbereich Verwendung der Begriffe Stützvektor und Richtungsvektor, Austauschbarkeit des Stützvektors, Skalierbarkeit des Richtungsvektors umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Parameterwert und Punkt
– Punktprobe	innere und äußere Punkte einer Strecke
– parameterfreie Gleichung: $\vec{u} \times \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = \vec{0}$ Plücker-Form	Julius Plücker (1801-1868)
– Lagebeziehungen	Parallelität, Identität, Windschiefe, Schnitt ➔ Klassenstufe 8: Lineare Gleichungssysteme
• Ebenen	(K4)
– Punktrichtungsgleichung: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$	Parametergleichung mit passendem Parameterbereich Stützvektor und Richtungsvektoren austauschbar, Richtungsvektoren linear unabhängig umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Parameterwertepaar und Punkt Interpretation als Leitgerade $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit angehängten Parallelen $\vec{x} = \mu \cdot \vec{v}$
– Punktprobe	innere und äußere Punkte einer Fläche Schnittgebilde
– parameterfreie Gleichungen: $\vec{n} \bullet \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$ Normalenform, Koordinatenform, Hesse-Form	Verwendung des Begriffs Normalenvektor auch in Achsenabschnittsform Ludwig Otto Hesse (1811-1874)
– Lagebeziehungen	auch zu Geraden bzw. Strecken ➔ Klassenstufe 8: Lineare Gleichungssysteme ➔ Lernbereich 1: Gaußscher Algorithmus
– Schnittwinkel	

Mathematik, G-Kurs (3. Halbjahr)	
2. Vektorielle Untersuchung geometrischer Situationen	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Abstände • Definition als minimale Entfernung	(K5) minimale Entfernung je zweier Punkte der beteiligten Punktmengen (soweit existent), Vermeidung des Infimum-Begriffs
• Abstand Punkt-Punkt – Symbolik $d(P;Q)$ – $\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$	➔ Klassenstufe 8: Satz von Pythagoras @ Berechnung mit elektronischen Hilfsmitteln
• Abstand Punkt-Gerade – Symbolik $d(P;g)$	(K2) Mögliche Vorgehensweisen: – Berechnung als Schnittproblem mittels einer Hilfsebene – elementargeometrischer Ansatz $d(P;g) = \left\| \vec{u}^{\,0} \times \overrightarrow{AP} \right\|$ – analytische Lösung als Extremwertproblem
• Abstand Punkt-Ebene – Symbolik $d(P;e)$	(K2) Mögliche Vorgehensweisen – Berechnung als Schnittproblem mit Lotgerade – elementargeometrischer Ansatz $d(P;e) = \left\| \vec{n}^{\,0} \bullet \overrightarrow{AP} \right\|$
Anwendungen an Punktmengen im Alltag	(K3), (K2) z.B. im Zusammenhang mit Lichtstrahlen (Schattenwurf), Bahnen geradliniger Bewegungen (Treff- und Navigationsprobleme), Lage- und Formbeschreibung von Objekten (Landschaft und Architektur)

Mathematik, G-Kurs (4. Halbjahr)	
1. Wahrscheinlichkeiten	**15 Stunden**

Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind bereits in den vorausgehenden Klassenstufen behandelt worden. Wiederholungen sollten dazu genutzt werden, altersgemäße Kontexte zu wählen und Aufgaben von größerer Komplexität zu bearbeiten.
Die fachsystematische Behandlung erfolgt entlang den von Kolmogorow aufgestellten Grundeigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. In Kontexten wird ein verständiger Umgang mit der Symbolik eingefordert.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Umgang mit der Symbolik	Visualisieren an Venn-Diagrammen John Venn (1834-1923)
• Verknüpfen von Ereignissen	
– Gegenereignis $\overline{A}$	(K4)
– UND-Ereignis $A \cap B$	sprachliche und formale Fassungen
– ODER-Ereignis $A \cup B$	
– Regeln von de Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Augustus de Morgan (1806-1871)
– Zerlegungssatz $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$	
– Vierfeldertafel mit den Ereignissen $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$	
• Grundeigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes – als Funktion von der Ereignismenge nach $\mathbb{R}$ – Nichtnegativität: $P(A) \geq 0$ – Normiertheit: $P(\Omega) = 1$ – Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für unvereinb. Ereignisse	Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987) Erweiterung der Definition der Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen
• Folgerungen aus den Grundeigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes	Veranschaulichen an Venn-Diagrammen
– $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	
– $0 \leq P(A) \leq 1$	
– $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Additionssatz
– $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$	2. Pfadregel
Modellieren von Zufallsexperimenten	@ Simulation von Zufallsexperimenten mittels Pseudozufallszahlen
• Laplace-Wahrscheinlichkeit	➔ Klassenstufe 7: Laplace-Experimente Allgemeines Zählprinzip
– Gleichverteilung: $P(A) = \frac{k}{n}$	vereinfachende Annahmen, Idealisierungen, klassische Wahrscheinlichkeit
– Beispiele	Münze, Würfel, Glückrad, Kartenspiel (K3) Ummodellieren Beispiele: Augensumme beim Doppelwürfel, symmetrisches Galton-Brett Francis Galton (1822-1911) Gleichverteilung durch Verfeinern der Ergebnismenge

Mathematik, G-Kurs (4. Halbjahr)	
1. Wahrscheinlichkeiten	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Bedingte Wahrscheinlichkeit	➔ Klassenstufe 9: Bedingte Wahrscheinlichkeit
– Definition $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	
– unabhängige Ereignisse	
• Bernoulli-Wahrscheinlichkeit	(K3)
– Bernoulli-Experiment	zweielementige Ergebnismenge: Treffer/Niete, Erfolg/Misserfolg Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ Zerlegen der Ergebnismenge nach A und $\overline{A}$ Bernoulli-Experiment durch Vergröbern der Ergebnismenge
– Bernoulli-Kette	unabhängiges Wiederholen desselben Bernoulli-Experimentes
– Anzahl $\binom{n}{k}$ der k-Teilmengen	Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachten der Reihenfolge Binomialkoeffizienten, Pascal-Dreieck, binomischer Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ mit den Sonderfällen $a=1 \wedge b=1$ sowie $a=-1 \wedge b=1$
– Binomialverteilung $P(A) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$	(K5) im Sinne einer Verteilung der Wahrscheinlichkeitswerte auf die Trefferzahlen Veranschaulichung am Galton-Brett Berechnung von p bzw. n in Sonderfällen
– Summenwahrscheinlichkeiten	@ Summationen mit elektronischen Hilfsmitteln Einsatz von Tabellenwerken

Mathematik, G-Kurs (4. Halbjahr)	
2. Zufallsgrößen	**13 Stunden**

Mit der Einführung des Begriffs der Zufallsgröße als eine auf der Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes reellwertige Funktion treten quantitative Aspekte in der Stochastik in den Vordergrund. Zufallsgrößen werden z.B. bei Fragen der Qualitätskontrolle, der Gewinnerwartung, der Rentabilität und Risikobewertung betrachtet. In diesem Lernbereich beschränke man sich im Wesentlichen auf diskrete Zufallsgrößen. Im Lehrplan treten nichtdiskrete Zufallsgrößen nur fakultativ im Zusammenhang mit der Normalverteilung auf, die als Näherung der Binomialverteilung angesprochen wird. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel sind umfangreiche numerische Berechnungen ohne großen Aufwand durchzuführen.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Diskrete Zufallsgrößen	abzählbare Wertemenge
• Definition	
– Beispiele aus dem Alltag	z.B. Spielpläne bei Glücksspielen, Häufigkeiten, Bewertungen
– Diskretisierung durch Klasseneinteilung	Intervalle von Messwerten bei Längen, Massen, Zeitangaben ➔ Normalverteilung stetiger Zufallsgrößen
– als Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$	(K4)
– Symbol $X:\Omega \to \mathbb{R}$	Sprechweise: Zufallsgröße auf Ω
– Ereignisse als Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen mit $X(\omega)$	z.B. $X(\omega) = x_i$, $X(\omega) > x_i$
– Einteilung der Ergebnismenge in paarweise unvereinbare Ereignisse durch $X(\omega) = x_i$	Klasseneinteilung von Ω
• lineare Transformation $a \cdot X + b$	
• Wahrscheinlichkeitsverteilung als Funktion von $X(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ bzw. nach [0;1]	➔ Lernbereich 1: Wahrscheinlichkeitsmaß jedem Wert x_i der Zufallsgröße wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X(\omega) = x_i$ zugeordnet Vergröberung der Ereignismenge
• Anwendungen	z.B. Wahrscheinlichkeiten für Gewinne, Ausfälle, Kosten ➔ Lernbereich 1: Simulationen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Simulationen können auch dort weiterhelfen, wo eine Modellierung nicht weiterführt.
Charakteristische Größen	
• Erwartungswert	
– Gewichtete Mittelwerte	Mittelwertberechnungen durch Wichten mit den relativen Häufigkeiten bei Gewinnen, Verlusten, Kosten ➔ Klassenstufe 7: Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für die relative Häufigkeit
– Definition des Erwartungswertes $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i$	(K4)
– Symbol $E(X)$ bzw. μ	
– Anwendungsbeispiele	Kalkulation von Versicherungsprämien, Gewinnchancen, Kosten, Rentabilität, Risikoabwägung als Erwartungswerte 🗗 Massenschwerpunkt

Mathematik, G-Kurs (4. Halbjahr)

2. Zufallsgrößen **13 Stunden**

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
– Verhalten bei linearen Transformation $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$	rechnerischer Nachweis Sonderfälle $a = 0$ bzw. $b = 0$ beachten Folgerung: $E(X - \mu) = 0$
– Verhalten beim Quadrieren $E(X^2) = \sum P(X = x_i) \cdot x_i^2$	$E(X^2) \neq \left(E(X)\right)^2$ Trägheitsmoment
• Varianz	Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen vom Erwartungswert bei unterschiedlichen Verteilungen
– Definition der Varianz: $E\left((X-\mu)^2\right)$	Erwartungswert der Quadrate der Abweichungen
– Symbol $Var(X)$	Die Varianz ist genau dann Null, wenn die Zufallsgröße konstant ist. Die Funktion $e(x) = E\left((X - x)^2\right)$ besitzt an der Stelle $x = \mu$ ihr absolutes Minimum.
– $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$	rechnerischer Nachweis
• Standardabweichung bzw. Streuung – Definition $\sqrt{Var(X)}$ – Symbol $\sigma(X)$	
• Anwendungen	(K3) **fakultativ:** • Tschebyschow-Ungleichungen
Binomialverteilung	Interpretation der Trefferzahlen als Werte einer Zufallsgröße ➔ Lernbereich 1: Bernoulli-Kette
• Definition – $P(X = k) = B(n; p; k)$	
– Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten	z.B. $P(X > k)$, $P(k_1 \leq X \leq k_2)$ Multiple-Choice-Test, Qualitätskontrollen, Schadenverlauf, Verteilung idealer Gase (K3) @ Einsatz elektronischer Hilfsmittel
• Erwartungswert und Standardabweichung – $E(X) = n \cdot p$ – $\sigma(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ – Abschätzung $p \cdot (1 - p) \leq 0{,}25$	(K3) formale Herleitung z.B. durch Ableiten des Polynoms $(p + q)^n$ nach p
• Anwendungen im Alltag	(K3) **fakultativ:** • Normalverteilung