

Saarland

Ministerium für Bildung,  
Kultur und Wissenschaft

Achtjähriges Gymnasium

## **Lehrplan Mathematik**

für die Einführungsphase  
der gymnasialen Oberstufe

Februar 2006



# LEHRPLAN MATHEMATIK FÜR DIE EINFÜHRUNGSPHASE DER GYMNASIALEN OBERSTUFE

## Vorbemerkung

Der Lehrplan für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe bringt die Funktionenlehre und die klassische Geometrie der SI zu einem vorläufigen Abschluss. Der Lernbereich Folgen und dessen Anwendungen verbinden beide Gebiete mit den Anfängen der Analysis. Die Untersuchung des Grenzwertverhaltens im Unendlichen und bei infinitesimalen Prozessen ist gekennzeichnet durch zunehmende Abstraktion und markiert den Übergang zur SII, ohne jedoch die Anbindung an die Alltagswelt zu verlieren.

Die Bedeutung der Lerninhalte der Einführungsphase zeigt sich in zahlreichen Berufsfeldern. Die Sinusfunktion als Grundmodell periodischer Vorgänge, arithmetische und geometrische Folgen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen und schließlich die Stereometrie als Modellierung für Körper des Anschauungsraumes. Exponential- und Logarithmusfunktion sind über Terme des exponentiellen Wachstums unmittelbar zugänglich und werden in der Hauptphase eingehend behandelt.

In den Bildungsstandards<sup>1</sup> beschriebene allgemeine und inhaltsbezogene mathematischen Kompetenzen sind im Lehrplan berücksichtigt. Sie bilden zugleich die Grundlage für einen erfolgreichen Unterricht in der Hauptphase der Oberstufe.

## Hinweis

Die **Reihenfolge** der Lernbereiche ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die methodisch-didaktischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.

Die **Vorschläge und Hinweise** im Lehrplan gehen von der durchgängigen Nutzung elektronischer Hilfsmittel und der Verfügbarkeit von Computeralgebrasystemen aus.

---

<sup>1</sup> „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“  
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003

Das Spektrum der Eigenschaften von Funktionen wird durch die Behandlung der Sinusfunktion um die Begriffe „Periode“ und „Amplitude“ erweitert. Änderungen in der Periode bei sonst gleichartigem Funktionsverlauf entsprechen einer Streckung des Graphen in x-Richtung. Mit Hilfe der neuen Begriffe und unter Einführung des Bogenmaßes rücken bei dem aus der Dreieckslehre bekannten Sinus die funktionalen Eigenschaften in den Mittelpunkt. Damit bietet der Mathematikunterricht eine erste Grundlage zur Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik. Der naturwissenschaftliche Unterricht der Oberstufe muss entsprechend seiner fachspezifischen Erfordernisse das Thema weiterführen. Demgemäß wird in diesem Lernbereich auf das Lösen trigonometrischer Gleichungen verzichtet.

**Verbindliche Inhalte**

**Vorschläge und Hinweise**

**Periodizität**

- periodische Vorgänge und Muster
  - zeitlich: Periodendauer
  
  - räumlich: Periodenlänge
  
- periodische Funktionen
  - Definition der Periode  $p$
  - Graphen erfinden
  
- Bogenmaß eines Winkels
  - Definition als Maßzahl der orientierten Kreisbogenlänge am Einheitskreis
  - Proportionalität von Bogenmaß  $x$  und Gradmaß  $\alpha$
  - Mode-Einstellung beim Taschenrechner

**Sinusfunktion mit  $x \mapsto \sin(x)$**

- Definition von  $\sin(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ 
  - „Sinusuhr“ am Einheitskreis

z.B. Herzrhythmus, Wachstumsperioden von Pflanzen, Uhrenpendel, Rhythmen in der Musik, Versmaß, Kreisbewegung

➔ Klassenstufe 9 (math.-naturw. Zweig): Kreis als parametrisierte Kurve

z.B. Tapetenmuster, Ornamente

☞ Kristallgitter

@ [www.chemie.uni-jena.de](http://www.chemie.uni-jena.de)

☞ Wellen: zeitlich und räumlich periodisch

☞ Einsatz von x-y-Schreiber

☞ Kippspannung beim Oszilloskop

**Projekt:**

Sonnenauf- und -untergangszeiten im Verlauf mehrerer Jahre (Tageslichtdauer)

kleinste positive Zahl  $p$ , so dass für alle  $x \in D$  gilt:  $f(x+p) = f(x)$

nur zeichnerisch ohne Termbestimmung

☞ Auswertung eines Elektrokardiogramms

Winkelmaße ohne Einschränkung

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

RAD, DEG, GRD bzw. GRAD

➔ Klassenstufe 9: Sinus

$x$  als Winkel im Bogenmaß interpretieren

Projektion der Kreisbewegung auf die y-Achse

@ Einsatz von Simulationsprogrammen oder DGS

☞ Schattenprojektion einer Kreisbewegung

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Eigenschaften
  - Definitionsmenge  $\mathbb{R}$
  - Wertemenge
  - Periode
  - Amplitude
  - Punktsymmetrie zum Ursprung
  - Achsensymmetrie
  
  - Nullstellen
  - Extremstellen
  - Graph

als halbe Schwankungsbreite der Funktionswerte  
 $\sin(-x) = -\sin(x)$   
 bezüglich der Parallelen zur y-Achse durch die  
 Extrempunkte  
 unendlich viele  
 unendlich viele (Der Begriff Extremum wird nicht  
 problematisiert.)  
 Handskizzen mit dem Näherungswert 3 LE für  $\pi$   
 anfertigen  
 Ausnutzen der Periodizität

Variation der Sinusfunktion

- Streckung in y-Richtung
  - positive Streckfaktoren
  - negative Streckfaktoren
- Streckung in x-Richtung
  - positive Streckfaktoren
  - negative Streckfaktoren
- Parallelverschiebungen der Sinuskurve
  - in x-Richtung
  - Kosinusfunktion
  - in y-Richtung
- Hintereinanderausführung zur Form  
 $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x-x_0)) + d$
- Allgemeine Sinusfunktion mit  
 $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ 
  - Zurückführung der Darstellung auf den  
 Fall  $b > 0$
  - Periode  $p = \frac{2\pi}{b}$
  - Phasenverschiebung  $x_0 = -\frac{c}{b}$
  - Amplitude  $|a|$
- Erstellung des Graphen aus einem gegebenem Term

➔ Klassenstufe 9:  $y = a \cdot (x - x_0)^2 + d$   
 @ Experimenteller Zugang beim Einsatz von  
 elektronischen Hilfsmitteln  
 $y = a \cdot \sin(x)$

Spiegeln an der x-Achse:  $y = -\sin(x)$   
 $y = \sin(b \cdot x)$   
 Kontrastierung zur Streckung in y-Richtung  
 Spiegeln an der y-Achse:  $y = \sin(-x)$

$y = \sin(x - x_0)$   
 $y = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$   
 $y = \sin(x) + d$

Reihenfolge beachten

- ☞ Schwingungen und Wellen
- ☞ Schallschwingungen
  - $x$  als Variable für die Zeit
  - $|a|$  bestimmt die Lautstärke
  - $|b|$  bestimmt die Tonhöhe

Symmetrie des Sinus zum Ursprung ausnutzen

Vielfache von  $p$  können addiert werden

Handskizze für ein Periodenintervall

Wesentliche Inhalte des Unterrichts im Lernbereich Stereometrie sind die Entwicklung von mathematischen Modellen und die Anwendung in konkreten Fällen. Selbstverständlich sind dabei sowohl das räumliche Anschauungsvermögen als auch algebraische Fertigkeiten zu schulen.

Eine vertiefte Behandlung des Volumenproblems und des Satzes von Cavalieri bleiben der Oberstufe im Zusammenhang mit dem Integralbegriff vorbehalten. Ausschöpfungen, z.B. durch Treppenkörper, können anschließend im Rahmen des Lernbereichs Folgen auf gymnasialem Niveau thematisiert werden.

In der Auseinandersetzung mit Aufgabenstellungen aus der Stereometrie werden wichtige Inhalte zurückliegender Klassenstufen wiederholt und so Grundwissen und -kompetenzen gefestigt.

**Verbindliche Inhalte**

**Vorschläge und Hinweise**

**Körpertypen**

- Prismen und Zylinder
  - Vorkommen in Alltag und Technik
  - Eigenschaften
  - Klassifizierung in gerade und schiefe Körper
  
  - Quader als Sonderfall
  - Rauminhaltsformel  $V = G \cdot h$
  - Mantelinhaltsformel  $M = U \cdot h$
  
  - Oberflächeninhaltsformel  $O = M + 2 \cdot G$
  
- Pyramiden und Kegel
  - Vorkommen in Alltag und Technik
  - Eigenschaften
  - Klassifizierung in gerade (rotations-symmetrische) und schiefe Körper
  - (reguläres) Tetraeder als Sonderfall
  - Rauminhaltsformel  $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
  
  - Mantelinhaltsformel  $M = \frac{1}{2} \cdot U \cdot h_s$
  
  - Oberflächeninhaltsformel  $O = M + G$

- ➔ Klassenstufe 6: Geometrische Körper  
Flächentypen und Flächeninhaltsformeln  
Beschränkung auf einfache Grundflächen  
  
z.B. kongruente Grund- und Parallellflächen  
Kontrastierung des schiefen Kreiszyinders zum  
angeschnittenen geraden Kreiszyinder  
Sonderfall des Satzes von Cavalieri  
für kongruente Schnittflächen  
vierseitiges gerades Prisma  
Vergleich mit Quaderformel  $V = a \cdot b \cdot c$   
gilt nur bei geraden Körpern  
➔ Klassenstufe 5: Rechtecke
  
- Beschränkung auf einfache Grundflächen  
  
z.B. Vorkommen einer Spitze  
➔ Klassenstufe 9: regelmäßige Vielecke
  
- Zerlegung eines Würfels in 6 kongruente  
quadratische Pyramiden  
Umfüllexperimente im Vergleich mit Zylinder  
 $h_s$  ist die Seitenhöhe, Abwicklung beachten  
➔ Klassenstufe 7: Flächeninhalt des Dreiecks

Mathematik, Einführungsphase	
2. Stereometrie	10 Stunden
Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Halbkugel               <ul style="list-style-type: none"> <li>– Vorkommen in Alltag und Technik</li> <li>– Eigenschaften</li> <li>– Rauminhaltsformel <math>V = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h</math></li> <li>– Mantelinhaltsformel <math>M = U \cdot h</math></li> </ul> </li>   <li>• Kugel               <ul style="list-style-type: none"> <li>– Eigenschaften</li> <li>– Vorkommen in Alltag und Technik</li> <li>– Rauminhaltsformel <math>V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3</math></li> <li>– Oberflächeninhaltsformel <math>O = 4\pi \cdot r^2</math></li> </ul> </li> </ul> <p><b>Anwendungsaufgaben</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Körper in Natur, Alltag und Technik</li> <li>• Zerlegungen von Körpern</li> <li>• Ergänzungen an Körpern</li> </ul>	<p>Umfüllexperimente im Vergleich mit Kegel keine Abwicklung möglich</p> <p>herleitbar z.B. über <math>V = \frac{1}{3} \cdot O \cdot r</math> (Pyramiden)</p> <p>Übungsfeld zum Sichern des Grundwissens über die „Pythagoreische Satzgruppe“ und den Lernbereich „Sinus und Kosinus“ z.B. Schattenkegel, Walze, Dachkonstruktionen, Erdkugel</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>☞ Architektur: Baukörper</li> <li>☞ ägyptische Pyramiden</li> <li>☞ Auftrieb, Grabstein des Archimedes</li> </ul> <p>z.B. Hohlkugel, Metamorphosen des Würfels durch Abtragen von den Würfecken her</p> <p><b>fakultativ:</b> Platonische Körper ➔ Klassenstufe 6: Eulersche Polyederformel</p>

Die Beschreibung außer- und innermathematischer Prozesse durch Zahlenfolgen führt zu diskreten Modellen unserer Wirklichkeit. Zugleich sind Folgen grundlegend für die Definition der zentralen Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die zur Charakterisierung kontinuierlicher Vorgänge dienen. Früher behandelte Algorithmen wie Iterationen und Rekursionen werden nunmehr systematisch analysiert, wobei den elektronischen Hilfsmitteln beim Erzeugen und Darstellen der Zahlenfolgen sowie beim Festigen des Grenzwertbegriffs eine besondere methodische Bedeutung zukommt.

Hinsichtlich des Abstraktionsniveaus besticht die Vielschichtigkeit des „unendlich Großen“ und des „unendlich Kleinen“ in Verbindung mit „unendlich vielen“ Objekten.

Der Grenzwertbegriff bei Folgen bildet nach den Intentionen des Lehrplans die Grundlage für die sich anschließende Differenzialrechnung. Der Übergang zu Funktionen mit reeller Definitionsmenge kennzeichnet zugleich die Erweiterung vom Diskreten zum Kontinuum. Bei der Annäherung an Stellen beschränke man sich auf exemplarische Folgen unter Hinzuziehen von Nullfolgen. Dem Mehr an Anschaulichkeit stehen geringere Anforderungen an Strenge in der formalen Darstellung gegenüber.

**Verbindliche Inhalte**

**Vorschläge und Hinweise**

**Zahlenfolgen**

- anwendungsorientiert
  
- innermathematisch
  - besondere Zahlentypen oder Terme
  
  - Folgen bei Annäherungsverfahren, Iterationen, Rekursionen oder Intervallschachtelungen
  - stochastische Folgen

**Wachstumsprozesse**

- lineares Wachstum oder linearer Zerfall
  - arithmetische Folgen
  
  - Darstellung in diskreten Graphen
  - Summe der ersten  $n$  Glieder einer arithmetischen Folge

- ➔ Klassenstufe 7:  
Verzinsung von Kapitalanlagen
- ➔ Klassenstufe 9: Flächeninhalte und Seitenlängen der DIN-Papierformate (Ähnlichkeit), Flächeninhalt des regelmäßigen  $n$ -Ecks
- @ Darstellungen durch elektronische Hilfsmittel
  
- ➔ Klassenstufe 5:  
Quadratzahlen  $n^2$ , Zweierpotenzen  $2^n$ , gerade Zahlen  $2n$ , ungerade Zahlen  $2n+1$ , Primzahlen (kein Term möglich)
- ➔ Klassenstufe 6: Stammbrüche  $1/n$
- ➔ Klassenstufe 8:  
Heron-Verfahren, irrationale Zahlen
- ➔ Klassenstufe 9: Ausschöpfung der Kreisfläche  
z.B. Entwicklung der relativen Häufigkeit eines Zufallsexperiments

z.B. gleichmäßiges Füllen oder Leeren prismatischer Gefäße

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{somit} \quad a_n = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_{n+1})$$

Sonderfall: konstante Folge für  $d = 0$

➔ Klassenstufe 6: arithmetischer Mittelwert

➔ Klassenstufe 7: lineare Funktion

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = (n+1) \cdot \left[ a_0 + \frac{1}{2} \cdot n \cdot d \right]$$

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- geometrisches Wachstum, Zerfall
  - geometrische Folgen
  - Darstellung in diskreten Graphen
  - Verdopplungs- bzw. Halbierungsprobleme
  - Eulersche Zahl
  - Summe der ersten  $n$  Glieder einer geometrischen Folge

**Darstellung und Festlegung von Zahlenfolgen**

- Symbolik  $\langle a_n \rangle$
- Aufzählen der ersten Glieder einer Folge
- Darstellung in diskreten Graphen
- Angabe eines Terms für das  $n$ -te Glied einer Folge
- rekursive / iterative Beschreibung

z.B. Zinseszinsformel:  $K_n = K_0 \cdot q^n$ ,  $q = 1+p/100$ , radioaktiver Zerfall, tabellarische Bestimmung von Halbwertszeiten  $T_H$  bzw. Verdopplungszeiten  $T_D$  ( $p \cdot T_D \approx 70$ )

➔ Hauptphase: Exponentialfunktion

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ somit } a_n = \sqrt[n]{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Sonderfälle: konstante Folge für  $q = 1$   
alternierende Folgen für  $q < 0$

➔ Klassenstufe 8: geometrischer Mittelwert

Vorstufe zu Graphen von Exponentialfunktionen

kontinuierliche „Verdopplung“ führt auf die Euler-Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ als Wachstumsfaktor}$$

Leonhard Euler (1707-1783)

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Summe *aller* Glieder einer Folge falls  $|q| < 1$

Reihenfolge der Glieder wesentlich

Auffinden eines Bildungsgesetzes

@ Internet-Recherche mit Stichworten  
On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

@ Einsatz elektronischer Hilfsmittel  
reellwertige Funktion mit Definitionsmenge  $\mathbb{N}$ :

$$a_n = f(n)$$

@ Wertetabelle durch elektronische Hilfsmittel

Terme  $a_{n+1} = T(a_n)$  oder  $a_{n+1} = T(a_n; a_{n-1})$

z.B. Fibonaccifolge:  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Leonardo Fibonacci (um 1170 bis ca. 1240)

@ Programm zur Tabellenkalkulation

z.B. Anzahl der Umlegungen beim

„Turm von Hanoi“:  $a_{n+1} = 1 + 2 \cdot a_n$

Mathematik, Einführungsphase	
3. Folgen	13 Stunden
Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
<p><b>Eigenschaften von Folgen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Monotonie</li>   <li>• (einseitige) Beschränktheit</li> <li>• Konvergenz <ul style="list-style-type: none"> <li>– Grenzwert <math>a</math> von Folgen</li>   <li>– verbal: Die Abstände aller Glieder <math>a_n</math> einer Folge von <math>a</math> werden beliebig klein, wenn <math>n</math> ausreichend groß ist.</li> <li>– Symbolik <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a</math></li>   <li>– besondere Nullfolgen</li> </ul> </li> </ul>	<p><math>a_{n+1} \leq a_n</math> bzw. <math>a_{n+1} \geq a_n</math> mit und ohne Beschränktheit ➔ Klassenstufe 9: Potenzfunktionen <math>a_n \leq S</math> bzw. <math>a_n \geq S</math> @ Einsatz elektronischer Hilfsmittel Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Bernhard Bolzano (1781-1848) Karl Weierstrass (1815-1897) kontrastierend: Divergenz formal: zu jedem <math>\varepsilon &gt; 0</math> gibt es ein <math>m \in \mathbb{N}</math> mit <math> a_n - a  &lt; \varepsilon</math> für alle <math>n \geq m</math></p> <p>tabellarisches, grafisches und algebraisches Ermitteln der Indizes <math>n</math> mit <math> a_n - a  &lt; \varepsilon</math> Sonderfall: <math>a = 0</math> (Nullfolgen) ➔ Lernbereich 4: lokale Differenzierbarkeit</p> <p><b>fakultativ:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Folgen bei Iteration von Funktionen ➔ Lernbereich 4: Stetigkeit ➔ Hauptphase: Verkettung <ul style="list-style-type: none"> <li>– „Spinnwebgrafik“ bei Iteration linearer Funktionen mit negativer Steigung; Grenzwert als Fixpunkt bzw. als Lösung der Iterationsgleichung: <math>x = f(x)</math>; Beispiel: Heronverfahren <math display="block">f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{c}{x} \right)</math></li> <li>– stabile und instabile Fixpunkte</li> <li>– Einsatz von Programmen zu Fraktalen</li> <li>– selbstähnliche Figuren z.B. Längen und Flächeninhalte bei Schneeflocken und Sierpinski-Dreieck</li> <li>– Waclaw Sierpinski (1882-1969)</li> </ul> </li> <li>• Begriff der Reihe <ul style="list-style-type: none"> <li>– Folge <math>\langle s_n \rangle</math> der Teilsummen</li> <li>– Konvergenz der geometrischen Reihe</li> <li>– unendliche periodische Dezimalbrüche</li> <li>– Divergenz der harmonischen Reihe</li> </ul> </li> </ul>

Die im Unterricht vorkommenden Funktionen sind im Allgemeinen stetig, zumindest abschnittsweise stetig. Der vorliegende Lernbereich sollte genutzt werden, die in den vorangegangenen Klassenstufen behandelten Grundfunktionen samt ihren Graphen und den typischen Eigenschaften zu wiederholen. Mit dem Verknüpfen von Funktionen wird das Funktionsrepertoire beträchtlich erweitert.

Mit Hilfe der Grenzwertbegriffe für Folgen und Funktionen erhält man eine eingängige Definition des Begriffs der lokalen Stetigkeit, der seine Stärke global über abgeschlossenen Intervallen entfaltet und Funktionen eine besondere Qualität verleiht. Die den entsprechenden Sätzen zugrunde liegende Vollständigkeit der reellen Zahlen wird nicht thematisiert. Die Grenzwertsätze für Funktionen lassen unmittelbar auf die Stetigkeit von abschnittsweise aus stetigen Funktionen zusammengesetzten Funktionen schließen.

Bezüglich der numerischen Anwendungen des Stetigkeitsbegriffs geht es in erster Linie um die mit der Stetigkeit verbundene „Stabilität“ der Funktionswerte bei geringen Schwankungen der Ausgangswerte.

**Verbindliche Inhalte**

**Vorschläge und Hinweise**

**Verknüpfungen von Funktionen**

- Vielfaches einer Funktion
- Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Funktionen
  - Symbolik  $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$

**Grenzwerte von Funktionen**

- Grenzwertbegriff
  - Übergang von  $\langle x_n \rangle$  zu  $\langle f(x_n) \rangle$
  - Definition des Grenzwertes von Funktionen
  - Unabhängigkeit von  $\langle x_n \rangle$
  - Symbolik  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
  - einseitige Grenzwerte
  - Symbolik  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

➔ Hauptphase: Verkettung  
Veranschaulichen mit elektronischen Hilfsmitteln  
➔ Klassenstufe 9: Streckung in y-Richtung  
Definition z.B. durch  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
Definitionsmenge beachten  
Ordinatenaddition bei Summe

**fakultativ:**

- Tangensfunktion
  - $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- ➔ Klassenstufe 9: Sinus, Kosinus, Tangens  
Schwerpunkt auf rationalen Funktionstermen  
➔ Lernbereich 3: Grenzwert von Folgen  
@ Einsatz von Tabellenkalkulation

graphische, tabellarische und algebraische Untersuchung

Auswahl entsprechender Folgen  $\langle x_n \rangle$

kontrastierende Grenzwertuntersuchungen z.B. an den Funktionstermen

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}, \operatorname{sgn}(x), \sin\left(\frac{1}{x}\right), \frac{\sin(x)}{x}$$

mit jeweils ausgewählten Folgen  $\langle x_n \rangle$

graphische tabellarische, algebraische und/oder geometrische Darstellung

@ Einsatz elektronischer Hilfsmittel

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Grenzwertsätze für Funktionen
  - bei Multiplikation mit einem Skalar
  - beim Addieren und Subtrahieren
  - beim Multiplizieren und Dividieren

ohne Beweis, exemplarisches Überprüfen  
Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Verknüpfung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

**Begriff der Stetigkeit**

- Definition der Stetigkeit
  - Vertauschbarkeit von Grenzwert- und Funktionswertbildung bei Stetigkeit
  - lokal
  - global
  - stetige Ergänbarkeit
- Veranschaulichung am Graph
  - lokale Stabilität
  - Graph als zusammenhängende Kurve

an Häufungsstellen  $x_0$  der Definitionsmenge

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

☞ Stetigkeit und Nichtstetigkeit von Größenbeziehungen

z.B. globale Stetigkeit der Kehrwertfunktion

geringe Schwankungen der  $x$ -Argumente erzeugen geringe Schwankungen der Funktionswerte

auch bei abschnittsweise definierten Funktionen  
kontrastierende Beispiele bei Nichtstetigkeit

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

**Stetigkeit von Funktionenklassen**

- Grundfunktionen
  - Stetigkeit linearer Funktionen
  - Stetigkeit der Potenzfunktionen
  - Stetigkeit von Sinus- und Kosinusfunktion
  
- Stetigkeit von Vielfachen, Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen
  
- Stetigkeit rationaler Funktionen
  - Entwicklung aus Grundfunktionen
  - stetig behebbar Lücken gebrochen-rationaler Funktionen

**Stetigkeitssätze**

- Nullstellensatz
- Zwischenwertsatz
- Satz vom Minimum und Maximum
  - Begriffsdefinition „lokales Extremum“
  - Veranschaulichung an Graphen
- Intervallsatz

exemplarisch begründen und veranschaulichen

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0|$$

➔ Lipschitz-Stetigkeit (fakultativ)

Beachtung der Definitionsmengen  
Übertragung der Grenzwertsätze

ganzrational und gebrochen rational  
 $x \mapsto x$  (Identität) ;  $x \mapsto c$  (konstante Funktion)

Veranschaulichen ohne Beweise  
Kontrastierende Beispiele bei Wegfall der Voraussetzungen (Stetigkeit, abgeschlossenes Intervall)

Anwendung bei Näherungsverfahren

Bernhard Bolzano (1781-1848)

Karl Weierstrass (1815-1897)

Randextrema beachten

jedes abgeschlossene Intervall wird auf ein abgeschlossenes Intervall abgebildet

**fakultativ:**

- lokale Lipschitz-Stetigkeit  
Rudolf Lipschitz (1832-1903)
  - Definition:  $|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$   
(grenzwertfrei)
  - $L$  als obere Schranke für die mittlere Steigung

Die Einführung des Ableitungsbegriffs folgt dem didaktischen Konzept des Übergangs von der globalen zur lokalen Änderungsrate. Damit wird die inhaltliche Bedeutung dieses zentralen Begriffs mit seinen weit reichenden Anwendungen in den Mittelpunkt gestellt. Ein zu frühes Üben von Umformungen zur Berechnung des Differenzialquotienten verengt den Blick auf technische Aspekte und verdeckt den eigentlichen Kern. Die für die Konvergenz geforderte Unabhängigkeit von den zugrundeliegenden Folgen sollte problematisiert werden. In konkreten Nachweisen beschränke man sich auf ausgewählte Folgen, die durch den Einsatz einer Tabellenkalkulation numerisch und grafisch dargestellt werden können.

Der Zugang zum Ableitungsbegriff ist durch vier Sichtweisen geprägt: geometrisch, numerisch, algebraisch und anwendungsorientiert. Der geometrische Zugang entspricht dem klassischen Weg von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Das Problem der Quotientenbildung zweier Nullfolgen bei der Grenzwertbetrachtung des Differenzenquotienten wird bei der numerischen Bearbeitung offensichtlich. Die algebraische Behandlung des Ableitungsbegriffs soll in der Einführungsphase überwiegend ohne elektronische Hilfsmittel erfolgen.

In den Anwendungen spielen Tangenten als konkrete geometrische Objekte sowie Tangentensteigungen als abstrakte Größen eine Rolle. Eine erste innermathematische Anwendung ist das Newtonverfahren, mit dem man zu den Folgen zurückkehrt.

**Verbindliche Inhalte**

**Vorschläge und Hinweise**

**Globale Änderungsrate**

- durchschnittliche Steigung eines Weges
- Durchschnittsgeschwindigkeit einer Bewegung
- durchschnittliche Zuwachs- bzw. Abnahmerate
  
- Sekantensteigung und mittlere Steigung eines Graphen in einem Intervall
- Differenzenquotient

**Lokale Änderungsraten**

- lokale Steigung eines Weges
- Momentangeschwindigkeit einer Bewegung
- momentane Zuwachs- bzw. Abnahmerate
  
- Differenzialquotient bzw. Ableitung
  - Definition  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
  - Symbolik  $f'(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx}(x_0)$
- Tangentensteigung und lokale Steigung eines Graphen in einem Punkt

➔ Klassenstufe 8: Lineare Funktionen

Zeichnen eines Höhenprofils

☞ Geschwindigkeitsbegriff in der Physik

Kursentwicklung von Aktien, Temperaturverlauf, Bevölkerungsentwicklung, Füllkurve eines Gefäßes

➔ Klassenstufe 7: Funktionen

➔ Klassenstufe 8: Terme

➔ Mittelwerte von Funktionen

➔ Klassenstufe 7: Steigung, Steigungsdreieck

z.B. maximale Temperaturänderung am Mittag eines Sonnentages, Änderung der Füllhöhe in Abhängigkeit von der Gefäßform

Grenzlage beim „Sekantentrichter“

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

**Ableitung von Funktionen**

- Ableitung an einer Stelle
  - Begriff der (lokalen) Differenzierbarkeit und der Tangente
  - numerische Bestimmung von  $f'(x_0)$
  
  - algebraische Bestimmung von  $f'(x_0)$  durch Einsetzen spezieller Folgen und Anwenden der Grenzwertsätze
  - Berechnung von  $f'(x_0)$  durch Bereinigen des Nenners bei Potenzfunktionen
  - Gleichung der Tangente in einem Punkt des Graphen
  - Steigungswinkel
  - einseitige Differenzierbarkeit
  
- Ableitung in einem Intervall
  - Begriff der (globalen) Differenzierbarkeit in einem Intervall, Symbolik  $f'(x)$
  - graphisches Differenzieren
  - Potenzregel
  
  - Ableitungen von Kehrwert- und Wurzelfunktion
  
- Ableitungsregeln
  - Faktorregel
  
  - Summenregel

Tangente  $t$  als Gerade mit  $m = f'(x_0)$  und  $P(x_0 | f(x_0)) \in t$

@ Tabellenkalkulation

Spalten:  $n; x_n - x_0; f(x_n) - f(x_0); \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

z.B. Wahl von  $x_n = x_0 + \frac{1}{n}, x_n = x_0 - \frac{1}{n}$

z.B. durch Polynomdivision oder mittels binomischer Formeln oder durch Einsatz von CAS auch Interpretation als lineare Approximation

@ Funktionenmikroskop, Zoom-Einsatz

➔ Klassenstufe 9:  $m = \tan(\alpha)$

Begriff der Differenzierbarkeitsmenge, Symbolik  $D'$

„glatter“ Verlauf des Graphen

Kontrastierung durch Betragsfunktionen

Geschwindigkeits-Zeit-Graphen

aus Weg-Zeit-Graphen

für  $f(x) = x^n$  gilt  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

exemplarischer Nachweis für natürliche Exponenten

➔ Leistungskurs: Vollständige Induktion

Begründung mit Hilfe des Differenzialquotienten

erste Aussagen zur Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen

Beweise mit Hilfe der Grenzwertsätze

$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$

anschaulich: gleiche Streckung der Tangentensteigungen

Anwendung: Kreisumfang als Ableitung des Flächeninhaltes

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

anschaulich: Addition bzw. Subtraktion der Tangentensteigungen

☞ Addition von Geschwindigkeiten in der klassischen Mechanik

