Saarland
Ministerium für Bildung,
Kultur und Wissenschaft

Achtjähriges Gymnasium

Lehrplan Mathematik

für die Klassenstufe 9

Februar 2005

Stand August 2011

Vorbemerkung

Im Unterricht der Klassenstufe 9 wird die Behandlung der Themenbereiche ebene Geometrie, Algebra und Stochastik auf dem Niveau der Sekundarstufe I abgeschlossen. Dieser Abschluss legt hinsichtlich der Inhalte, des Begriffsverständnisses und des Abstraktionsniveaus die Maßstäbe fest, an denen beim Eintritt in die Oberstufe der Gymnasien das Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler zu messen sind. Im Lernbereich Trigonometrie wird ein abbildungsgeometrischer Zugang zur Leitidee Ähnlichkeit gewählt, die einen Weg zur Darstellung der Trigonometrie der Ebene öffnet. Die Stochastik wird mit den Themen "mehrstufige Zufallsexperimente" und "bedingte Wahrscheinlichkeit" zu einem der Sekundarstufe I gemäßen Abschluss gebracht. Auch in der Algebra werden mit den "quadratischen Gleichungen und Ungleichungen" sowie den "Potenzen" klassische Mittelstufenthemen behandelt.
Der Funktionsbegriff und die Eigenschaften von Funktionsklassen bilden einen weiteren Schwerpunkt des Unterrichts. Die vielfältigen Aspekte des Funktionsbegriffs werden wirkungsvoll und nachhaltig durch die Verfügbarkeit der Neuen Medien erschlossen. Der Einsatz elektronischer Hilfsmittel ermöglicht den direkten Vergleich der grafischen, numerischen und algebraischen Darstellungen von Funktionen. Einfache Symmetrie und Monotonie sowie die Auswirkungen der Variationen der Parameter sind Themen bei der Betrachtung der quadratischen und der Potenzfunktionen. Die Problematik der Umkehrbarkeit von Funktionen wird in der Oberstufe eingehend erörtert.
Wie bereits in Klassenstufe 8 verliert der Kalkül beim Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen an Bedeutung. Die zu erreichenden Standards haben der Verfügbarkeit von CAS Rechnung zu tragen.
Die Untersuchung parametrisierter Kurven im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig geht von alltagsnahen Situationen aus. Dabei wird der Blick vom x-y-Muster auf das realitätsbezogene Durchlaufen von Kurven gelenkt, wobei der Funktionscharakter zumindest bezüglich des Kurvenparameters und der Koordinaten erhalten bleibt. Die Stärke des Werkzeugs Taschencomputer zeigt sich insbesondere beim experimentellen Überprüfen der Modellierungen.

Hinweis

Die **Reihenfolge** der Lernbereiche ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die methodisch-didaktischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.
Die **Vorschläge und Hinweise** im Lehrplan gehen von der durchgängigen Nutzung elektronischer Hilfsmittel und der Verfügbarkeit von Computeralgebrasystemen aus.
Fakultative Inhalte für den sprachlichen Zweig ergeben sich über die entsprechenden Hinweise in der rechten Spalte hinaus auch aus den zusätzlichen Lernbereichen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweiges.

Mathematik, Klassenstufe 9

1. Trigonometrie — 20 Stunden

In der Klassenstufe 8 wurden durch die Behandlung der Satzgruppe des Pythagoras erste Schritte zur analytischen Bearbeitung von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken getan. Die trigonometrischen Methoden liefern Instrumente, mit denen nun auch beliebige Dreiecke untersucht werden können. Die Zusammenhänge zwischen Winkeln und Längen erweisen sich sowohl innermathematisch als auch in vielen Anwendungsbereichen als nützlich.
Der Ähnlichkeitsbegriff ist eine Verallgemeinerung des Kongruenzbegriffs und fungiert wie dieser als Leitidee. Der Zugang erfolgt abbildungsgeometrisch durch die Behandlung der zentrischen Streckung. Beweise der Ähnlichkeitssätze sind nicht vorgesehen; im Mittelpunkt stehen die Anwendungen des Begriffs, insbesondere bei der Herleitung und Begründung geometrischer Sätze und bei physikalischen Zusammenhängen.
Über die trigonometrische Flächenformel ist eine formal einfache iterative Bestimmung des Flächenmaßes eines Kreises über regelmäßige Vielecke möglich. Tiefergehende Betrachtungen zur Existenz und Definition des Kreisflächenmaßes sind an dieser Stelle nicht vorgesehen. Hinsichtlich einer übersichtlichen numerischen Auswertung des Konvergenzverhaltens und zur grafischen Veranschaulichung der Konvergenzgeschwindigkeit bringt der Einsatz eines Taschencomputers entscheidende Vorteile.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
1.1 Ähnliche Dreiecke	
Ähnliche Figuren und Körper im Alltag	
• Beispiele	Produktmerkmal Form, z.B. bei Getränkeflaschen Schattenwurf bei punktförmiger Lichtquelle Zeichengerät Storchschnabel; DIN-Papierformate Zoom-Funktion bei Grafikprogrammen Lochkamera, Fotografie, Diaprojektion Landkarten (mit Maßstab) Eindruck von Raumtiefe durch ähnliche Verkleinerung
• Symbol ~	lat.: similis
Zentrische Streckung	
• Definition der Abbildung	Beschränkung auf positive Streckfaktoren *k* Bildpunkt auf Halbgerade Zentrum-Punkt konstanter Quotient der Abstände
• Eigenschaften	ohne Beweis
– Geradentreue	
– Winkeltreue	
– Parallelität von Strecke und Bildstrecke	zentrische Streckung einer Geraden im Koordinatensystem mit Ursprung als Streckzentrum (geometrisch und algebraisch): $y = m \cdot x + n \quad \mapsto \quad y = m \cdot x + k \cdot n$
• Konstruktion ähnlicher Figuren	
Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	
• Analogie zu den Kongruenzsätzen	*sss*, *sws*, *wsw*, *Ssw* bei Dreiecken
• Ähnlichkeitssatz ww bzw. www	kontrastierend: Rechtecke

Mathematik, Klassenstufe 9	
1. Trigonometrie	**20 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
1.1 Ähnliche Dreiecke (Fortsetzung)	
• Anwendungen	Teildreiecke beim rechtwinkligen Dreieck Herleitung des Kathetensatzes 🗗 Kräftezerlegung an der schiefen Ebene 🗗 Größenverhältnisse: totale Sonnenfinsternis 🗗 Strahlengang an der Sammellinse: Linsengleichung $\frac{g-f}{f}=\frac{f}{b-f}$ nach Isaac Newton (1642-1723) **fakultativ:** Strahlensätze, Sehnensatz, Sekantensatz Konstruieren durch anfängliches Nichtbeachten einer Bedingung z.B. beim Problem des Regiomontanus Johannes Müller (1436-1476) **Projekt:** Selbstähnlichkeit, Fraktale, z.B. Sierpinski-Dreieck, Koch-Kurve Waclaw Sierpinski (1882-1969) Helge von Koch (1870-1924)
Flächeninhalt und Volumen ähnlicher Figuren bzw. Körper • Änderung um k^2 bzw. k^3 (bei zentischer Streckung mit Streckfaktor k)	Beschränkung auf Rechteck bzw. Quader ➔ Lernbereich 2: Flächeninhalt des Kreises

Mathematik, Klassenstufe 9

1. Trigonometrie **20 Stunden**

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
1.2 Sinus, Kosinus, Tangens	
***sin*, *cos*, *tan* als Seitenlängenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck**	
• Winkel und Seitenverhältnisse	eineindeutige Entsprechung
• Definition von sin(α), cos(α) und tan(α) – als Quotienten von Seitenlängen	zunächst nur für spitze Winkel α
– als Maßzahlen der Seitenlängen von Dreiecken am Einheitskreis im 1. Quadranten	Ähnlichkeit sichert Äquivalenz der beiden Definitionsmöglichkeiten
***sin*, *cos*, *tan* als Koordinaten am Einheitskreis**	
• Erweiterung der Definition	Winkelmaße über 90° und negative Winkelmaße „Sinusuhr“
• besondere Werte bei 0°, 30°, 45°, 60° und 90°	Herleitung an besonderen Dreiecken ➔ Klassenstufe 8: Satz von Pythagoras
• besondere Beziehungen – $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	
– $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ – $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$ – $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ – $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	➔ Klassenstufe 10: Sinusfunktion
Berechnung beliebiger Dreiecke	
• Sinussatz	
• Kosinussatz	mit dem Satz von Pythagoras als Sonderfall
• Anwendungen	z.B. Vermessungswesen, Navigation **fakultativ:** Steigungswinkel bei Geraden im Koordinatensystem – Steigungswinkel α mit -90° < α < 90° – $m = \tan(\alpha)$ – Schnittwinkel von Geraden, Differenz der Winkelmaße der Steigungswinkel
Anwendungen am Kreis	
• Flächeninhalte – Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$	und zyklische Vertauschungen
– regelmäßiges *n*-Eck: $A = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$	@ Folgenglieder unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel, tabellarisch und graphisch
– Kreis: $A = \pi \cdot r^2$	einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige *n*-Ecke
• Kreisumfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$	„Kuchenmethode“ oder iteratives Verfahren

Mathematik, Klassenstufe 9	
2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	**15 Stunden**

Der Wert des Einsatzes eines Taschenrechners mit Grafikdisplay wird besonders deutlich bei der Behandlung von Funktionsgraphen. In der Möglichkeit, Funktionen ohne großen Aufwand zugleich numerisch, graphisch und algebraisch zu bearbeiten, liegt ein großes didaktisches Potenzial, das Vernetzung, Methodenvielfalt und somit lernpsychologische Verstärkung erlaubt. Das Umschalten zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen und die unmittelbar verfügbare Rückmeldung bieten Vorteile für einen nachhaltigen Lernerfolg.
Mit der Behandlung quadratischer Funktionen lernen die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Klasse nicht linearer Funktionen kennen. Der Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen sollte exemplarisch unter den Aspekten „Streckung in *y*-Richtung“ und „Parallelverschiebungen in den Achsenrichtungen“ untersucht werden. Die Zusammenhänge zwischen Term und Graph sowie die charakteristischen Eigenschaften können in höheren Klassenstufen auf andere Funktionstypen übertragen werden.
Ein besonderes Augenmerk soll auf das Zusammenspiel zwischen den Nullstellen der Parabeln und dem Lösen quadratischer Gleichungen und Ungleichungen gelegt werden. Die formalen Lösungsverfahren sind weiterhin zu behandeln, verlieren aber angesichts der Verfügbarkeit von CAS ihre dominante Stellung. Auch die Konzentration auf ein lediglich schematisch ablaufendes Verfahren passt nicht mehr zu einer modernen Sicht von Unterricht. Qualitative Einordnungen gewinnen gegenüber numerischen Ergebnissen wieder an Bedeutung.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Variation der Grundfunktion	@ Einsatz des Funktionenplotters, experimentelles Entdecken
• Quadratfunktion mit $x \mapsto x^2$	in $\mathbb{R}^+$: Flächeninhalte von Quadraten
– Wertetabelle ($D = \mathbb{R}$)	
– Graph	Normalparabel, Zeichenschablone
– Eigenschaften	Scheitel, Achsensymmetrie, Monotoniewechsel ➔ Lernbereich 4: Potenzfunktionen
• Parallelverschiebungen des Graphen – parallel zur y-Achse: $y = x^2 + v$ – parallel zur x-Achse: $y = (x - u)^2$	
• Spiegelung des Graphen an der x-Achse: $y = - x^2$	
• Streckungen des Graphen in y-Richtung: $y = a \cdot x^2$ – positive Streckfaktoren	
– negative Streckfaktoren	beinhalten Spiegelung an der *x*-Achse
Quadratische Funktionsterme	
• Termtypen	➔ Klassenstufe 8: Terme @ Äquivalenzen mit dem CAS
– allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$	
– Scheitelpunktsform: $f(x) = a\,(x - u)^2 + v$	quadratische Ergänzung
– Nullstellenform: $f(x) = a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$	
• Wertetabelle und Graph	Parabeln **fakultativ:** @ Metamorphosen in Parabelscharen
• Charakteristische Eigenschaften – Entstehung aus der Quadratfunktion – *y*-Achsenabschnitt – Scheitel und Öffnungsrichtung	
– Nullstellen	Scheitelstelle mittig bezüglich der Nullstellen
• Vom Graph zur Gleichung	z.B. ausgehend von drei Punkten des Graphen @ Lösen des entstehenden Gleichungssystems mit dem CAS

Mathematik, Klassenstufe 9	
2. Quadratische Funktionen und Gleichungen	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$	➔ Lernbereich 4: Gleichungen höheren Grades
• Gleichungen der Form $x^2 = d$	überschlägiges Rechnen mittels Quadratzahlen ➔ Klassenstufe 8: Quadratwurzel
• Normierung $x^2 + px + q = 0$	
• Finden von Näherungslösungen – numerisches Probieren durch Einsetzen	auch ohne technische Hilfsmittel ➔ Klassenstufe 11: Stetigkeit, Zwischenwertsatz
– Durchmustern von Wertetabellen	@ Verfeinern von Wertetabellen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel
– graphisch	@ Zoomfunktion des Funktionenplotters auch durch manuelles Zeichnen, z.B. Schnittstellen der gespiegelten Normalparabel $y = -x^2$ mit der Geraden $y = px + q$
• Klassifizieren nach Lösungstypen Nullstellen der Parabel mit $y = x^2 + px + q$	keine, genau eine, genau zwei Lösungen Diskriminante, z.B. $p^2 - 4q$ Kriterien: Scheitel und Öffnungsrichtung
• Lösen durch Faktorisieren – mittels Ausklammern – mittels binomischer Formeln – mittels Linearfaktoren	 bei $x^2 + px = 0$ nur bei ganzzahligen Lösungen
• Verfahren der quadratischen Ergänzung	Lösungsterm bei normierter Gleichung, z.B. $\frac{1}{2}\cdot\left(p+\sqrt{p^2 - 4q}\right)$, $\frac{1}{2}\cdot\left(p-\sqrt{p^2 - 4q}\right)$
• Lösen mit dem CAS	**fakultativ:** @ Programmieren eines Lösungsalgorithmus • algebraische und numerische Lösungsverfahren
Quadratische Ungleichungen $x^2 + px + q > 0$ $x^2 + px + q < 0$	Entwickeln aus Nullstellen und Öffnungsrichtung der zugehörigen Parabel
Anwendungsaufgaben	z.B. Flächeninhalte von Rechtecken gleichen Umfangs, Analyse geeigneter Brückenkonstruktionen, Bremswegeformeln, Nachfrage- und Erlösfunktionen, Paraboloid bei rotierenden Flüssigkeiten, Extremwertaufgaben (ohne Randextrema), Wurfparabel ➔ Lernbereich 5: parametrisierte Kurven

Mathematik, Klassenstufe 9	
3. Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit	**10 Stunden**

Während in Klassenstufe 7 die Entwicklung von Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einfache Anwendungen im Vordergrund stehen, werden die erworbenen Kompetenzen nun bei der Untersuchung von mehrstufigen Zufallsexperimenten und bedingten Wahrscheinlichkeiten erweitert. Dabei dominiert noch die Arbeit mit konkreten Beispielen; gleichwohl wird auch die formale mathematische Sprache weiterentwickelt.
Als grundlegendes Modellierungsmuster dient das im Unterricht bereits zum Zählen und Strukturieren verwendete Baumdiagramm.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Strukturieren von Ergebnissen und Ereignissen mit Hilfe von Baumdiagrammen	Beispiele: Würfeln, Wege am Galtonbrett, Münze werfen, Ziehen aus Urnen ➔ Klassenstufe 7: mehrstufige Zufallsexperimente
• Ergebnisse als Pfade • Ergebnisse als Tupel • Ereignisse – verbal – als Menge von Ergebnissen	mehrere Pfade bzw. mehrere Tupel
Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Baumdiagrammen	auch Wahrscheinlichkeiten, die von den vorangegangenen Stufen abhängen ➔ Bedingte Wahrscheinlichkeit
• Ast als Träger der Wahrscheinlichkeit des betrachteten Zwischenexperimentes	
• Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses als Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades (1. Pfadregel)	auf den Begriff des Elementarereignisses kann hier noch verzichtet werden ➔ Klassenstufe 7: Wahrscheinlichkeitsverteilungen
• Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zum Ereignis gehörenden Ergebnisse bzw. Pfade (2. Pfadregel)	
	fakultativ: Bernoulli-Kette Jakob Bernoulli (1655-1705)
Bedingte Wahrscheinlichkeit	
• Untersuchung zweier Ereignisse *A, B* – mindestens ein Ereignis tritt ein Symbol $A \cup B$ – beide Ereignisse treten ein Symbol $A \cap B$	Veranschaulichung durch Mengendiagramme John Venn (1834-1923)
– Zerlegen nach Ereignissen und Gegenereignissen	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$; Vierfeldertafel
• Wahrscheinlichkeit, dass *A* eintritt, unter der Bedingung, dass *B* eingetreten ist – Symbol $P_B(A)$ – Interpretation am Venn-Diagramm – Interpretation am Baumdiagramm $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$	zweistufiges Baumdiagramm Kontrastierung zu $P(A)$ aus 1. Pfadregel
• Unabhängigkeit der Ereignisse *A* und *B*	$P(A) = P_B(A)$ *bzw.* $P(B) = P_A(B)$ *bzw.* $P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B)$

Mathematik, Klassenstufe 9	
4. Potenzen, Potenzgesetze und Potenzfunktionen	**15 Stunden**

Die integrierende Behandlung von Term, Wertetabelle und Graph schafft gute Voraussetzungen für ein nachhaltiges Lernen im Unterricht. Diese lernfördernden Bedingungen werden durch die Verfügbarkeit der neuen Werkzeuge außerhalb des Unterrichts, insbesondere beim Bearbeiten von Hausaufgaben, noch verstärkt. Das sichere Erkennen von Termstrukturen und das Beherrschen grundlegender Techniken gehören zu den angestrebten Kernkompetenzen. Ein deutlicher Akzent liegt auf dem Erarbeiten und Festigen von Begriffen (z.B. Funktionseigenschaften) und der Fähigkeit, Regeln und Verfahren inner- und außermathematisch anzuwenden. Die Erweiterung der Potenzdefinition auf rationale Exponenten orientiert sich an der Forderung nach der Beibehaltung der Potenzgesetze (Permanenzprinzip). Die in den Bereichen Algebra und Funktionenlehre vermittelten Kenntnisse sind notwendige Voraussetzungen für ein erfolgreiches Arbeiten in der Oberstufe.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Natürliche Exponenten	
• Potenzen	➔ Klassenstufe 5: Eigenschaften der natürlichen Zahlen
– Berechnung großer Potenzen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel, wissenschaftliche Notation	
– Definition von a^0 und a^1	Permanenzprinzip
– Vorzeichenregeln für gerade und ungerade Exponenten	
– Prioritätsregeln beim Multiplizieren	Potenzen als Exponenten, nicht assoziativ
• Potenzgesetze	formale und verbale Wiedergabe der Gesetze
– Multiplizieren und Dividieren bei gleicher Basis bzw. gleichem Exponenten	Bedeutung der Gesetze in beiden Richtungen Verdeutlichen an Beispielen
– Potenzieren von Potenzen	Exponent 0 beachten
• Potenzfunktionen	
– mit: $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \mathbb{R}$	$n = 2$: Flächeninhaltsänderung bei Streckung $n = 3$: Volumenänderung bei Streckung
– Graph	qualitativer Verlauf
– Klassifizieren nach geraden und ungeraden Exponenten	@ Wertetabellen und Graphen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel
– Wertemenge	➔ Lernbereich 2: Quadratfunktion
– Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung	für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$
– Strenge Monotonie	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$
– Monotonieintervalle	
Ganzzahlige Exponenten	➔ Klassenstufe 8: Terme
• Potenzen	
– Definition von Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten	Permanenzprinzip
– -1 als Exponent	Kehrwertbildung: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
– Dezimaldarstellung, wissenschaftliche Notation	
• Potenzgesetze	
– Gültigkeit der Gesetze	
– exemplarischer Nachweis der Gültigkeit eines Gesetzes für einen Fall	
– Quotienten als Produkte	$\frac{a}{b} = a \cdot \left(b^{-1}\right)$
– Vertauschbarkeit der Kehrwertbildung mit dem Potenzieren	$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

Mathematik, Klassenstufe 9	
4. Potenzen, Potenzgesetze und Potenzfunktionen	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
• Potenzfunktionen mit $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \mathbb{R}^*$	➔ Klassenstufe 7: Umgekehrt proportionale Funktionen
– Graph	qualitativer Verlauf
– Eigenschaften: Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrie, Monotonieintervalle	@ Wertetabellen und Graphen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel
– asymptotisches Verhalten	qualitative Beschreibung
– Funktionen mit $x \mapsto a \cdot (x-u)^{z} + v$, $z \in \mathbb{Z}^*$	@ Experimente mit dem Funktionenplotter ➔ Lernbereich 2: Variation der Quadratfunktion
Rational Exponenten	
• *n*-te Wurzeln	
– Beispiele aus der Geometrie	z.B. Kantenlänge eines Würfels mit vorgegebenem Volumen Problem der Würfelverdopplung
– graphisches und numerisches Lösen von Gleichungen der Form $x^{n} = a$, $n \in \mathbb{N}^*$	@ Einsatz elektronischer Hilfsmittel, auch iteratives Lösen ➔ Klassenstufe 8: Definition der Quadratwurzel
– Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	
– Definition: n-te Wurzel	
– Symbol $\sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$	
• Potenzen	
– Definition: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	Permanenzprinzip
– Definition: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	positive Basen, Unabhängigkeit von der Bruchdarstellung des Exponenten, TR-Problematik
• Potenzgesetze	ohne Nachweis
– Gültigkeit der Gesetze – Berechnen einfacher Terme	@ Einsatz des TR zur Kontrolle und zum Ermitteln numerischer Werte
– Vertauschbarkeit des Radizierens mit dem Potenzieren	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
• Potenzfunktionen mit $x \mapsto x^{q}$, $q \in \mathbb{Q}^*$; $D = \mathbb{R}^+$ bzw. $D = \mathbb{R}_0^+$	@ Wertetabellen und Graphen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel
– Graph – Eigenschaften	qualitativer Verlauf
– Beziehung zwischen $x \mapsto x^{q}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$	➔ Klassenstufe 11: Umkehrfunktion
Terme mit Potenzen	@ Kontrolle mit dem CAS
– Umformen einfacher Produkt- und Quotiententerme – Ausmultiplizieren und Ausklammern – Potenzen als Summanden	Beispiele: $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{b}\right)^3$, $\left(a + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^2$
– binomische Terme	**Projekt:** Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks
– Polynomdivision unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel	Probe durch Ausmultiplizieren ohne elektronische Hilfsmittel

Mathematik, Klassenstufe 9	
4. Potenzen, Potenzgesetze und Potenzfunktionen	**15 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
	fakultativ: • Nachweis der Potenzgesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten • Potenzen mit reellen Exponenten • Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades 🗗 Tonleiter der wohltemperierten Stimmung Johann Sebastian Bach (1685-1750)

Mathematik, Klassenstufe 9 — **mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig**

5. Parametrisierte Kurven — 20 Stunden

Kurven kommen in Natur, Technik und Alltag z.B. als Bahnkurven bei mechanischen Vorgängen oder als Berandungslinien von Figuren vor. Es geht hier also wesentlich um das Modellieren realitätsnaher Situationen und das Interpretieren der mathematisch erlangten Ergebnisse. Fast nebenbei begegnet man den klassischen Kurven Gerade, Parabel, Kreis und Ellipse unter neuen Gesichtspunkten.
Der Parameter „Zeit" macht aus starren Ortslinien dynamische Bahnen. Die bei der Modellierung auftretenden Maßeinheiten werden so gewählt, dass Rechnungen und Terme selbst ohne die Hinzunahme der Maßeinheiten zu bearbeiten sind. Dadurch werden Verwirrungen hinsichtlich der Kurvenparameter oder Scharparameter vermieden.
Die Polarkoordinaten ermöglichen eine einfache mathematische Beschreibung von Situationen und Abläufen, die auf ein Zentrum hin ausgerichtet sind. Mit Blick auf den in der Elementargeometrie entwickelten Winkelbegriff sollte man in dieser Klassenstufe den Polarwinkel θ im traditionellen Gradmaß handhaben. Nicht zuletzt liefern die Graphen $r = r(\theta)$ ein neues visuelles Verständnis funktionaler Abhängigkeit, das die bisherigen x-y-Sichtweise von Funktionsgraphen erweitert.
Die leichte Variierbarkeit der formgebenden Parameter ermöglicht ein abwechslungsreiches experimentelles Arbeiten mit elektronischen Hilfsmitteln. Die anschließende Suche nach Entsprechungen in der Realität gestaltet sich mitunter besonders reizvoll.

Verbindliche Inhalte	Vorschläge und Hinweise
Geraden	
• als Bahnkurven bei Bewegungen $x(t) = x_0 + v_x \cdot t$ $y(t) = y_0 + v_y \cdot t$ mit konkreten Werten x_0, y_0, v_x, v_y	🗗 Superpositionsprinzip Zeit t als Parameter Wertetabelle mit den Zeilen t, x und y
• als Ortslinien $y = m \cdot x + n$	Eliminieren des Parameters t ➔ Klassenstufe 8: Lineare Funktionen $m = \frac{v_y}{v_x}$
• Schnitt- und Treffprobleme	Kollisionskurs zweier Schiffe ➔ Klassenstufe 8: Lineare Gleichungssysteme @ Simulation unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel
Wurfparabeln	➔ Lernbereich 2: Parabeln
• Erzeugung und Vorkommen	z.B. Spritzbahnen beim Auslaufen eines mit Flüssigkeit gefüllten Behälters
• Gleichungen $x(t) = x_0 + v_x \cdot t$ $y(t) = y_0 + v_y \cdot t - 5 \cdot t^2$	5 als halbe gerundete Maßzahl des Ortsfaktors an der Erdoberfläche waagerechter Wurf: $v_y = 0$
• als Ortslinien $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	Parabel
• Anwendungsaufgaben	Wurfweite, Wurfdauer @ Simulationen unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel 🗗 Elektronenbahnen im elektrischen Querfeld, Braunsche Röhre

Mathematik, Klassenstufe 9	mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig
5. Parametrisierte Kurven	**20 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Kurven bei der gleitenden Leiter	@ Simulation mit DGS Abgleiten einer Leiter an einer senkrechten Wand
• „Sprossenkurven“ – Erzeugung – Gleichungen der Ellipsen $x(\varphi) = a \cdot cos(\varphi)$ $y(\varphi) = b \cdot sin(\varphi)$	Bahn einer Sprosse in der Seitenansicht Bahnkurve einer Sprosse mit den Abständen *a* und *b* vom oberen bzw. unteren Ende der Leiter Anlegewinkel φ als Parameter, wobei $0° \leq \varphi \leq 360°$
– als Ortslinien $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Thematisieren der Wahl des Koordinaten-systems **Projekt:** Bau eines Ellipsenzirkels **fakultativ:** • „Fußpunktkurve“ – Bahn des Fußpunktes F des Lots vom Ursprung auf die Leiter – Anlegewinkel φ als Parameter mit $0° \leq \varphi \leq 360°$ bei der Leiterlänge c – Gleichungen der Rosette $x(\varphi) = c \cdot cos(\varphi) \cdot sin^2(\varphi)$ $y(\varphi) = c \cdot sin(\varphi) \cdot cos^2(\varphi)$ • „Hüllkurve“ – Einhüllende aller Leiterpositionen – experimentell ermitteln, z.B. auch durch Spannen von Fäden – Gleichungen der Astroide $x(\varphi) = c \cdot sin^3(\varphi)$ $y(\varphi) = c \cdot cos^3(\varphi)$
Polarkoordinaten • Symbolik $P(r \mid \theta)$ mit Polarradius $r \geq 0$ und Polarwinkel $0° \leq \theta < 360°$	Navigation Winkel im Gradmaß verwenden
• Koordinatenbeziehungen – $x = r \cdot cos(\theta)$ $y = r \cdot sin(\theta)$ – $r^2 = x^2 + y^2$ – $tan(\theta) = \frac{y}{x}$	Satz von Pythagoras ➔ Lernbereich 2: Steigungswinkel an Geraden
• Wahl situationsgerechter Koordinaten-systeme	

Mathematik, Klassenstufe 9	mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig
5. Parametrisierte Kurven	**20 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Kreise • Kartesische Darstellung als Ortslinien • Polardarstellung $r(\theta) = r$ (konstant) • Parameterdarstellung $x(\theta) = r \cdot cos(\theta)$ $y(\theta) = r \cdot sin(\theta)$	➔ Lernbereich 1.2: Sinus, Kosinus, Tangens Problematik des Funktionsbegriffs: $x \mapsto y$ keine Funktion $\theta \mapsto r$ eine Funktion Polarwinkel θ als Parameter
• Anwendungsbezug: Bahnkurve	$\theta = \omega \cdot t$ (gleichförmige Bewegung) Zeit t als Parameter das Vorzeichen von ω bestimmt den Umlaufsinn Interpretation von $\theta < 0°$ und $\theta > 360°$
• Streckungen in Richtung der Achsen $x(\theta) = a \cdot cos(\theta)$ $y(\theta) = b \cdot sin(\theta)$	@ Einsatz von DGS Streckfaktor $\frac{a}{r}$ in x-Richtung Streckfaktor $\frac{b}{r}$ in y-Richtung Ellipsen **Fakultativ:** • Gemeinsame Polargleichung der Kegelschnitte $r(\theta) = \frac{p}{1-\varepsilon \cdot cos(\theta)}$ Ellipse für $0 \le \lvert\varepsilon\rvert < 1$ Parabel für $\lvert\varepsilon\rvert = 1$ (Lage beachten) Hyperbel für $\lvert\varepsilon\rvert > 1$ • Schraubenlinien im Raum
Spiralen • Beispiele – archimedische Spirale – hyperbolische Spirale	klassische streng monotone Terme für die Polarradien $r(\theta) = a \cdot \theta$ $r(\theta) = \frac{a}{\theta}$ **Fakultativ:** weitere Spiralen z.B. Fermatsche Spirale $r = a \cdot \sqrt{\theta}$ Pierre de Fermat (1601-1665) Krummstab $r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$
• Abstand benachbarter Windungen	

Mathematik, Klassenstufe 9	mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig
5. Parametrisierte Kurven	**20 Stunden**
Verbindliche Inhalte	**Vorschläge und Hinweise**
Zykloiden	
• Erzeugung	Überlagerung einer Kreisbewegung mit einer geradlinigen Bewegung in x-Richtung (r : Radius des Rollkreis, a: Abstand des Punktes vom Mittelpunkt des Rollkreises) z.B. Pedallinien beim Fahrrad
• Gleichungen $x(t) = v_x \cdot t + a \cdot \cos(\omega \cdot t)$ $y(t) = r + a \cdot \sin(\omega \cdot t)$	Zeit t als Parameter Thematisieren der Wahl des Koordinatensystems und des Drehsinns des Kreises @ Simulation unter Verwendung elektronischer Hilfsmittel auf Gradmaß einstellen
• Modellieren einer Kreisrollung Erfassen der Abrollbedingung	abgerollter Kreisbogen = zurückgelegter Weg: $2\pi \cdot r \cdot \frac{\omega \cdot t}{360} = v_x \cdot t$ r ist der Radius des mit Bodenkontakt ohne Schlupf rollenden Kreises
– Zykloidengleichungen $x(t) = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\omega}{360} \cdot t + a \cdot \cos(-\omega \cdot t)$ $y(t) = r + a \cdot \sin(-\omega \cdot t)$	Drehsinn des Kreises beachten
– Klassifizierung der Kurven	Auftreten von Spitzen, Wellen und Schleifen, wenn $a = r$ bzw. $a < r$ bzw. $a > r$
– Funktionseigenschaft $x \mapsto y$, falls $a \leq r$ – Periodizität – Symmetrie – Anwendungen und Vorkommen	keine explizite Darstellung des Funktionsterms möglich
	Fakultativ: • Überlagerung zweier Kreisbewegungen mit und ohne Abrollbedingung – Gleichungen – Anwendungen und Vorkommen, z.B. Wankelmotor, Geradführung, Spirograph, Ornamente **Projekte:** • Lissajous-Figuren – Experimente – Simulationen – Gleichungen – Analyse der Knotenanzahl • Brachistochronenproblem Johann Bernoulli (1667–1748)