

Saarland

Ministerium für Bildung,
Familie, Frauen und Kultur

Gymnasiale Oberstufe Saar

Lehrplan Mathematik

E-Kurs

Juni 2008

LEHRPLAN MATHEMATIK FÜR DEN E-KURS DER GYMNASIALEN OBERSTUFE SAAR

Stoffverteilungsplan

E-Kurs, 1. Halbjahr der Hauptphase		5 Wochenstunden
verbindliche Inhalte		Stunden
1. Vollständige Induktion		5
2. Funktionen und ihre Termstrukturen		15
3. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen		30
fakultativ: Regel von de L'Hospital, Iteration von Funktionen, Stetigkeit der Verkettung, Mittelwertsatz, Ableitung der Umkehrfunktion, Krümmungsmaß, Schnittwinkel von Funktionsgraphen		

E-Kurs, 2. Halbjahr der Hauptphase		5 Wochenstunden
verbindliche Inhalte		Stunden
1. Flächeninhalte und Stammfunktionen		15
2. Integrale		15
3. Exponentialfunktionen und \ln -Funktion		20
fakultativ: numerische Annäherung des Flächeninhaltes, uneigentliche Integrale mit endlicher Integrationsgrenze, Bogenlänge, Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel, Füllkurven, Rotationsvolumen durch Rotation um die y -Achse, logistisches Wachstum, harmonische Schwingung, allgemeine Logarithmusfunktionen		

E-Kurs, 3. Halbjahr der Hauptphase		5 Wochenstunden
verbindliche Inhalte		Stunden
1. Vektoren		20
2. Vektorielle Untersuchung geometrischer Situationen		20
fakultativ: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Teilverhältnisse in Figuren und Körpern		

E-Kurs, 4. Halbjahr der Hauptphase		5 Wochenstunden
verbindliche Inhalte		Stunden
1. Wahrscheinlichkeiten		20
2. Zufallsgrößen		15
fakultativ: k -Kombinationen, Tschebyschow-Ungleichungen, Normalverteilung		

Anmerkungen

1. Halbjahr des E-Kurses (11/1)

Im ersten Halbjahr des E-Kurses wird insbesondere die Behandlung der rationalen Funktionen weitergeführt; auch die allgemeine Sinusfunktion und die Wurzelfunktionen werden im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff thematisiert. Neben den bereits bekannten Verknüpfungen vergrößern das Verketteten und das Umkehren das Funktionenrepertoire und eröffnen zahlreiche Anwendungsbezüge.

In der klassischen Kurvendiskussion wird mit Hilfe der Differenzialrechnung auf die Gestalt des Funktionsgraphen geschlossen. Die Bedeutung des mathematischen Kalküls tritt aufgrund der Verfügbarkeit grafikfähiger elektronischer Hilfsmittel in den Hintergrund, ohne dass auf die Begründung des Zusammenhangs zwischen dem Term und dem Graphen verzichtet werden kann. Interessant werden Details der Formgebung oft erst in Verbindung mit alltagsrelevanten Fragestellungen. Damit gewinnen neben dem Analysieren das Modellieren und das Interpretieren zunehmend an Bedeutung.

Mit der vollständigen Induktion wird ein Beweisverfahren vorgestellt, das zugleich auch heuristische Kompetenzen zum Auffinden der eigentlichen Aussage einfordert. Die Beispiele sollten insbesondere dem aktuellen Stoffgebiet der Differenzial- und Integralrechnung entnommen werden, so dass das Beweisverfahren während des Unterrichts immer wieder zum Einsatz kommt und immanent wiederholt wird.

2. Halbjahr des E-Kurses (11/2)

Zentraler Gegenstand der Integralrechnung ist das Berechnen von Flächeninhalten und deren Interpretation in verschiedenen Kontexten. Im Rahmen der verfügbaren Unterrichtszeit bleibt die Existenzfrage für die Flächeninhalte nur angedeutet.

Der Integralbegriff wird in Anlehnung an die Riemann'sche Definition eingeführt. Eine vertiefte Behandlung der Integrierbarkeit ist nicht vorgesehen; insbesondere wird die Integrierbarkeit stetiger Funktionen ohne Nachweis festgestellt. Der Beweis zum Hauptsatz beschränkt sich daher auf den Nachweis, dass Integralfunktionen stetiger Funktionen Stammfunktionen sind.

Ausgehend vom exponentiellen Wachstum werden Exponentialfunktionen und die \ln -Funktion systematisch behandelt. Angesichts des Bedeutungsverlustes der klassischen Kurvendiskussion ist jedoch eine schematisierte Bearbeitung nicht angebracht. Vielmehr wird die isolierte Behandlung einzelner Funktionenklassen zu Gunsten kontextbezogener Anwendungen abgelöst.

Die Bedeutung der Anwendungen der Integralrechnung neben den üblichen Flächen- und Volumenberechnungen spiegelt sich im vorgeschlagenen Zeitansatz wider. Das inzwischen reichhaltige Instrumentarium zum Modellieren wird z.B. bei der Beschreibung von Profilen und von zeitabhängigen Prozessen eingesetzt.

3. Halbjahr des E-Kurses (12/1)

Schwerpunkt des dritten Halbjahres ist die analytische Geometrie. Die strukturbestimmenden Eigenschaften des Vektorraums der Translationen werden nicht verallgemeinert. Stattdessen spielen metrische Merkmale und die Erfassung des mit der Alltagswelt korrespondierenden Anschauungsraumes die zentrale Rolle.

Die Behandlung der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit beschränkt sich auf maximal drei Vektoren und somit auf Kollinearität und Komplanarität. Über konkrete Sachverhalte zur Bestimmung von Linearkombinationen erhalten die Schülerinnen und Schüler einen ersten mathematischen Einblick in den Dimensionsbegriff.

4. Halbjahr des E-Kurses (12/2)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung der vorausgehenden Klassenstufen wird fortgesetzt. Dazu wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit im Rahmen seiner Grundeigenschaften präzisiert und das bereits bekannte Regelwerk zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten erweitert. Eine zentrale Rolle spielt das Modellieren von Zufallsexperimenten, wobei auch kombinatorische Zählverfahren als Hilfsmittel genutzt werden.

Durch die Behandlung von Kenngrößen und Verteilungen diskreter Zufallsgrößen werden grundlegende Begriffe der Statistik eingeführt. Die Verfügbarkeit elektronischer Hilfsmittel macht Summenwahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen im üblichen Rahmen auch ohne Tafelwerke zugänglich. Die Normalverteilung einer stetigen Zufallsgröße wird im fakultativen Bereich thematisiert.

Hinweis

Die Konzeption der Oberstufenlehrpläne orientiert sich an den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik“ (EPA).

Die **Reihenfolge** der Lernbereiche ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Sie nimmt die methodisch-didaktischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg. Anwendungen sollten soweit wie möglich in die einzelnen Lernbereiche integriert werden, auch wenn sie im Lehrplan gebündelt ausgewiesen sind.

Die **Vorschläge und Hinweise** im Lehrplan gehen von der durchgängigen Nutzung elektronischer Hilfsmittel aus. Bei eingeschränkter Verfügbarkeit dieser Hilfsmittel gewinnt das Einüben von Kalkülen eine größere Bedeutung.

In der Sekundarstufe I werden im Rahmen der **Bildungsstandards** sechs **Allgemeine mathematischen Kompetenzen** für die Auseinandersetzung mit Mathematik herausgestellt. Die Kompetenzen beschreiben die übergeordneten Ziele des Mathematikunterrichts und geben Anhaltspunkte für seine Gestaltung und Bewertung.

K1 Mathematisch argumentieren

K2 Probleme mathematisch lösen

K3 Mathematisch modellieren

K4 Mathematische Darstellungen verwenden

K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

K6 Kommunizieren

Die Schulung dieser Kompetenzen durchzieht nach ersten Ansätzen in der Primarstufe die Lernbereiche Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik der Sekundarstufe I und wird dann in den Lernbereichen Analysis, analytische Geometrie, lineare Algebra und Statistik der Sekundarstufe II weiterentwickelt. Hier bilden die „Allgemeinen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung“ den Rahmen, in den sich die Unterrichtsgegenstände und das Anforderungsprofil einfügen. Explizite Angaben einzelner Kompetenzen im Lehrplan weisen auf sich anbietende Schwerpunktsetzungen im Unterricht hin.

Der vorliegende Lernbereich sollte nicht als isolierter Vorspann gesehen werden, sondern vielmehr das Grundverständnis des Beweisgedankens vermitteln, um in anderen Lernbereichen an Ort und Stelle zur Beweisführung zum Einsatz zu kommen. Der hier ausgewiesene Stundenansatz ist dann den entsprechenden Lernbereichen anteilig zuzuweisen.

Mit der vollständigen Induktion lernen die Schülerinnen und Schüler ein Beweisverfahren kennen, das auf dem Induktionsaxiom für natürliche Zahlen basiert. Im inhaltlichen Kontext des ersten Halbjahres kann man die vollständige Induktion einsetzen, um etwa Vermutungen über Ableitungen bestimmter Funktionen zu beweisen. Sofern im zweiten Halbjahr im Rahmen von äquidistanten Zerlegungen Summenformeln von Potenzen mit natürlichen Basen zur Sprache kommen, bestehen weitere Übungsmöglichkeiten für dieses Beweisverfahren.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Vollständige Induktion

- Aussageformen über \mathbb{N}
- Induktionsaxiom und Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Beispiele für Beweise

(K1)

Beispiele, Vermutungen aufstellen
Beschreibungsstruktur für Algorithmen
2 Verifizierungen in der Informatik

zum spiralförmigen Arbeiten oder zum immanenten Wiederholen nutzen, z. B. bei der Potenzregel, beim Bilden höherer Ableitungen von $x \cdot f(x)$, bei der Summenformel der geometrischen Reihe oder bei Summen von Potenzen mit natürlicher Basis bei festem Exponent

Beispiele außerhalb des Oberstufenlehrplans (z.B. zu Teilbarkeitsfragen) meiden

Chance zum heuristischen Arbeiten nutzen

@ Tabellenkalkulation liefert Datengrundlage zur Heuristik

Summenformeln:

$$\sum_{k=0}^n k^1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

@ weitere Summenformeln mit CAS

è Einführungsphase: Folgen

Nach einer Wiederholung der Potenzfunktionen und der allgemeinen Sinusfunktion schließen sich ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen an. Wichtige Eigenschaften dieser Funktionen lassen sich bereits ohne Differenzialrechnung aus den Untersuchungen der Nullstellen und des Grenzwertverhaltens ermitteln. Der Vorrat an Funktionen wird durch die bekannten Verknüpfungen wie das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sowie durch die vertrauten Abbildungen wie Strecken, Spiegeln und Verschieben erweitert. Mit dem Verketteten und dem Umkehren von Funktionen stehen weitere wirkungsvolle Instrumente zur Verfügung.

Die Interpretation zusammengesetzter Funktionen als Hintereinanderausführung von Grundfunktionen strukturiert die entsprechenden Kalküle hinsichtlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Das Wechselspiel von Funktion und Umkehrfunktion samt Existenzfragen ist ein immer wiederkehrendes Muster nicht nur mathematischer Fragestellungen.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Wiederholen der Grundfunktionen

- charakteristische Eigenschaften
- einfache Verknüpfungen

Ganzrationale Funktion

- Definition des Begriffs der ganzrationalen Funktion
- Polynomdivision und Teilbarkeit von Polynom
- maximale Anzahl von Nullstellen ganzrationaler Funktionen
- Definition der Vielfachheit einer Nullstelle
 - $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x), g(x_0) \neq 0$
- Nullstellen geradzahliger Vielfachheit
 - lokale Extrempunkte auf der x-Achse
- Nullstellen ungeradzahliger Vielfachheit
 - Sattelpunkte auf der x-Achse
- Skizzieren von Graphen ganzrationaler Funktionen mit vorgegebenen mehrfachen Nullstellen
- Erkennen der Vielfachheiten von Nullstellen bei Graphen und Aufstellen von Termen zu vorgegebenen Graphen

Lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, allgemeine Sinusfunktion

lineare und quadratische Funktionen als Sonderfälle

è Klassenstufe 9: Polynomdivision
Teilbarkeit durch Linearfaktor $(x-x_0)$, wenn x_0 Nullstelle ist (K5)

Verlauf der Graphen in Abhängigkeit vom Grad

k-fache Nullstelle

aus Wertetabelle und Vorzeichenbetrachtung heraus entwickeln

aus Wertetabelle und Vorzeichenbetrachtung heraus entwickeln

z. B. kubische Parabel

è Monotonie, Krümmung

Funktionsterme in faktorisierte Form vorgeben (K4)

fakultativ:

- Vielfachheit von x_0 mit $f(x_0) = c$ als Vielfachheit der Nullstelle von $f - c$, Extremstellenkriterium

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Rationale Funktion

- Definition der Begriffe der rationalen und der gebrochen rationalen Funktion
- eigentliche Grenzwerte

- Grenzverhalten ganzrationaler Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$
- Grenzverhalten gebrochenrationaler Funktionen
 - uneigentliche (einseitige) Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$ mit $x_0 \notin D$

 - Polstellen und Polgeraden
 - Grenzverhalten für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$
 - Asymptoten
 - Annäherungsverhalten an Asymptote
 - eigentliche Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$ mit $x_0 \in D$

- Skizzieren von Graphen gebrochenrationaler Funktionen, auch mit mehrfachen Nullstellen des Zählers und Nenners
- Aufstellen von Termen zu vorgegebenen Graphen

Verkettung von Funktionen

- Definition
 - Bezeichnung: äußere und innere Funktion
- Symbolik $(g \circ h)(x) = g(h(x))$
- Nichtkommutativität

@ numerisches Überprüfen
Kehrwertfunktion als Sonderfall

è Einführungsphase: Grenzwerte von Funktionen
Möglichkeit des Wiederholens von Kalkülen und der Grundfunktionen
Leitexponenten und -koeffizienten bestimmen den Globalverlauf

keine Definitionen uneigentlicher Grenzwerte
Verwenden des Symbols „lim“
Zerlegen von Zähler und Nenner gebrochenrationaler Terme in Linearfaktoren (K5) mit und ohne Vorzeichenwechsel
Polynomdivision bei unecht gebrochenrationalen Funktionen (K5)
insbesondere bei unecht gebrochen rationalen Funktionen
Beschränkung auf Asymptoten höchstens zweiten Grades
behebbar Lücken

fakultativ:

- Regel von de L'Hospital (K4)

Die charakteristischen Nullstellen- und Grenzwertmerkmale werden im Rahmen der Behandlung von Verknüpfungen von rationalen Funktionen mit e - und \ln -Funktionen wieder aufgegriffen

z.B. $x \text{ a } e^{\frac{1}{x}}$ und $x \text{ a } \frac{(x-1)}{\ln(x^2)}$ (K2)

@ Graphen mit elektronischen Hilfsmitteln (Problematisieren des Verhaltens bei Polstellen)

Bedingung an Wertemenge und Definitionsmenge im Verknüpfungsbereich beachten
allgemeine Sinusfunktion oder quadratische Funktion in Scheitelpunktsform
Sprechweise: g nach h

fakultativ:

- Iteration von Funktionen
- Stetigkeit der Verkettung

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Umkehrfunktionen

- Symbolik f^{-1}
- Umkehrbarkeit
 - Veranschaulichung am Graph
 - Monotonie als hinreichendes Kriterium für die Umkehrbarkeit
- Umkehrfunktionsterme
- Graphen
- Verkettung von Funktion und Umkehrfunktion

können auch im Zusammenhang mit der Einführung der \ln -Funktion behandelt werden

è 2. Halbjahr:
Exponentialfunktionen und \ln -Funktion
Abgrenzung zum Exponenten -1

jede Parallele zur x -Achse schneidet den Graph in höchstens einem Punkt (K4)

nicht notwendig,
kontrastierend ist z.B. die Kehrwertfunktion

Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden
Definitionsmenge je nach Reihenfolge:

$$f \circ f^{-1} = id_{W_f} \quad \text{bzw.} \quad f^{-1} \circ f = id_{D_f}$$

Die klassische schematisierte Funktionsdiskussion hat angesichts der Verfügbarkeit grafikfähiger elektronischer Systeme an Bedeutung verloren. Damit einhergehend wird die isolierte Behandlung von Funktionen gemäß den Funktionenklassen aufgelöst, die Funktionsterme sind zunehmend durchmischt. Zu bearbeiten sind ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen sowie einfache Verknüpfungen mit der Sinusfunktion und der Wurzelfunktion. Dabei sollten allerdings die Sinusfunktion und die Wurzelfunktion nur zu einfachen Funktionstermen hinzugezogen werden. Die Methoden der Differentialrechnung zur Ermittlung der Eigenschaften von Funktionen und des Verlaufs ihrer Graphen müssen – nach Bedarf mit CAS-Unterstützung – beherrscht werden.

Neben das Analysieren vorgegebener Kurven tritt auch das Modellieren von Kurven nach vorgegebenen Bedingungen gleichberechtigt hinzu.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Ableitungen

- Ableitungsfunktion
 - globale Differenzierbarkeit
 - Differenzierbarkeitsmenge D'
 - Symbolik $f'(x)$
 - Ableitung als Funktion $f': D' \rightarrow \mathbb{R}$
 - graphische Gegenüberstellung von Funktion und ihrer Ableitung
 - Beweis: Differenzierbare Funktionen sind stetig
 - Ableitung der Sinusfunktion mit $f(x) = \sin(x)$
 - Kosinusfunktion und ihre Ableitung
- Ableitungsregeln
 - Faktorregel und Beweis
 - Summenregel und Beweis
 - Produktregel und Beweis
 - Quotientenregel
 - Kettenregel
- höhere Ableitungen

- è Einführungsphase: Einführung in die Differentialrechnung
- „glatter“ Verlauf des Graphen
- Kontrastierung durch Betragsfunktionen z. B. bei der Wurzelfunktion
- Skizzieren des Graphen der Ableitung bei vorgegebenem Funktionsgraph und umgekehrt
- Widerlegung der Umkehrung
- Äquivalenz der Kontraposition des Satzes
- Begriffe „notwendig“ und „hinreichend“
- Veranschaulichen mit Hilfe des Graphen mit $f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin'(x)$
- Beweise von Grundaussagen und Formeln zur Differenzierbarkeit (K1)
- @ auch Einsatz von CAS
- è Wiederholung aus Einführungsphase
- è Wiederholung aus Einführungsphase
- Veranschaulichung am Zuwachs einer Rechteckfläche
- Beweis mit Hilfe von Produktregel und Kehrwertregel
- $(g \circ h)'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$
- Beweis der Kettenregel für $(f(x))^n$ mit vollständiger Induktion
- Anwendung: arithmetischer Mittelwert als Minimumstelle der Standardabweichung
- $$d(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2}$$
- fakultativ:**
 - Mittelwertsatz
 - Ableitungsregel für die Umkehrfunktion
- Verschwinden bei ganzrationalen Funktionen
- è Vollständige Induktion zum Nachweis struktureller Schemata

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Monotonie und Extrempunkte

- Monotonie und strenge Monotonie

- Monotoniekriterium
 - notwendige und hinreichende Bedingungen
 - Monotoniewechsel
 - Monotonieintervalle

- Extrempunkte
 - Extremwert oder Extremum, Extremstelle
 - lokale und globale Extrema

- Extremstellenkriterien
 - Beweis eines Kriteriums
 - $f'(x_0)=0$ als notwendige Bedingung im Innern von D'
 - Vorzeichenwechsel von f' als hinreichende Bedingung

 - $f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0) \neq 0$ als hinreichende Bedingung

Krümmung und Wendepunkte

- Krümmungsart
 - Monotonieverhalten der Ableitung
 - als Abweichungsverhalten von der jeweiligen Tangentenrichtung

- Krümmungskriterien
 - Krümmungswechsel
 - Krümmungsintervalle

- Wendepunkte
 - notwendige und hinreichende Bedingungen
 - Sattelpunkte

einmal stetig differenzierbare Funktionen
 @ Erstellen der Ableitungsterme und Lösen auftretender Gleichungen mit CAS
 è Klassenstufe 9:
 Definition der Monotonie
 Monotonie von Potenzfunktionen
 è Einführungsphase:
 Monotoniebegriff bei Folgen

z.B. kubische Parabel

nicht notwendig,

$$\text{z.B. } f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auch anwendbar, wenn f in x_0 stetig, aber nicht differenzierbar ist
 nicht notwendig

zweimal stetig differenzierbare Funktionen
 @ Erstellen der Ableitungsterme und Lösen auftretender Gleichungen mit CAS
 Links- bzw. Rechtskrümmung (K4)
 durch Koordinatensystem geprägtes Verständnis

innergeometrisch geprägtes Verständnis

Übertragung der Monotoniekriterien

z.B. bei $f(x) = x^2 + \sin(x)$

è Klassenstufe 9:
 Graphen von Potenzfunktionen (K4)

Punkte extremaler Steigung
 bei zweimal bzw. dreimal differenzierbaren Funktionen Übertragen der Extremstellenkriterien

fakultativ:

- Krümmungsmaß

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Analysieren von Graphen und Funktionen

- charakteristische Eigenschaften
- differenzialgeometrische Grundaufgaben
 - Aufstellen von Tangenten- und Normalengleichungen
 - Berechnen von Steigungswinkeln
- einparametrische Funktionenscharen
 - charakteristische Eigenschaften in Abhängigkeit vom Parameter
 - Ortslinien
- Extremwertaufgaben
 - differenzialgeometrisch an Graphen
 - alltagsbezogene Problemstellungen

Modellieren mit Hilfe von Graphen

- Profile
- Übergänge

anhand des bekannten Vorrats von ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen sowie einfachen Verknüpfungen dieser Funktionen, auch mit der Sinusfunktion und der Wurzelfunktion

keine schematisierten „vollständigen“ Funktionsdiskussionen, jedoch breit gestreute Anwendung der dort benötigten Bausteine

auch von Punkten außerhalb des Graphen

è Einführungsphase:
Gleichungen der Tangenten

fakultativ:

- Schnittwinkel
- @ Funktionenplotter
experimentell entdeckender Zugang mit Hilfe von Funktionenplottern

è 2. Halbjahr:
Exponentialfunktionen und \ln -Funktionen

(K3)
Optimierungsprobleme in Geometrie, Wissenschaft und Wirtschaft
Einbeziehung von Randuntersuchungen

sowohl geometrisch als auch algebraisch dominierte Situationen

Variieren zwischen systematischen Ansätzen und deren Auswertung sowie experimentellem Vorgehen

@ Verwenden von Regressionsmenüs bei CAS

Vasen, Gläser, Teile von Bauwerken (K3)

2 Stilelemente in der Kunstgeschichte

@ 3D-Darstellungen mit Hilfe von Zeichenprogrammen

Anpassen von Steigung und Krümmung (K3)

Die Vorüberlegungen zum Integralbegriff folgen dem didaktischen Konzept des Übergangs von der Änderung zum Bestand. Damit wird wie in der Differenzialrechnung die inhaltliche Bedeutung in den Mittelpunkt gestellt. Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Flächen- und Rauminhalten wird im schulischen Rahmen nur angesprochen aber nicht beantwortet. Die untersuchten Punktmengen lassen sich mit Hilfe von Ausschöpfungen durch bekannte Flächenmaße erfassen.

Durch die Beschränkung auf stetige Funktionen über abgeschlossenen Intervallen kommt man mit den Begriffen Maximum und Minimum aus (die im Rahmen einer Verallgemeinerung durch die Begriffe Supremum und Infimum zu ersetzen wären). Die bereits bekannten Grundfunktionen sollten die Hauptrolle spielen.

Einen attraktiven Einstieg in die Thematik bieten Flächen unter Messkurven, denen eine anwendungsbezogene Bedeutung zukommt, wie etwa der Weg als Flächeninhalt unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve.

Der Schritt zum Stammfunktionsbegriff ist durch die Analyse von Flächeninhalten bei Graphen von Potenzfunktionen geleitet.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Von der Änderung zum Bestand

- Anwendungsbeispiele
 - Sachbezogene Interpretation des Flächeninhaltes
- Flächeninhaltsbestimmungen
 - Symbolik: $\mu(A)$
 - Abschätzungen mittels Rechtecken $(b-a) \cdot \min f \leq \mu(A) \leq (b-a) \cdot \max f$
 - Eingrenzungen mittels Treppenflächen $U(f; Z_1) \leq \mu(A) \leq O(f; Z_2)$
 - Ober- und Untersummen
 - Bestimmung des Inhaltes der Fläche zwischen Normalparabel und x-Achse bei äquidistanter Zerlegung
 - Verträglichkeit mit dem elementargeometrischen Flächeninhaltsbegriff bei geradlinigen Graphen

Stammfunktionen

- Begriff der Stammfunktion
 - Definition: $D_F = D_f$ und $F'(x) = f(x)$
 - Symbole F, G, \dots
- Bildung von Stammfunktionstermen
 - Potenzregel
 - Umkehrung von Ableitungsregeln
 - Lineare Substitution
 - $h(x) = f(\alpha \cdot x + \beta) \Rightarrow H(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha \cdot x + \beta)$

- Beschränkung auf stetige Beispiele
- è Lernbereich 2: Hauptsatz
 - 2 von Geschwindigkeit und Zeit zum Weg
 - 2 von Kraft und Weg zur Arbeit
 - 2 von Grenzkosten und Stückzahl zu Produktionskosten
- Flächen zwischen Graph und x-Achse auch über Teilintervallen bei nichtnegativwertigen stetigen Funktionen
- è Einführungsphase: Stetigkeitssätze
- zeichnerische Darstellungen (K4)
- exemplarische Berechnungen für vorgegebene Zerlegungen
- Intervallschachtelung
- @ CAS-Einsatz
 - è 1. Halbjahr: Vollständige Induktion
- Wiederholen der Flächeninhaltsformeln für Trapez und Dreieck, Additivität des Flächenmaßes
- fakultativ:**
- numerische Annäherung des Flächeninhalts

die Stammfunktion trägt die den Funktionsnamen entsprechende lateinischen Großbuchstaben

- @ Erstellen und Überprüfen mit CAS

Nichtanwendbarkeit bei der Kehrwertfunktion
Kontrolle der Stammfunktionen durch Ableiten (K5)

Verbindliche Inhalte**Vorschläge und Hinweise**

- Eindeutigkeit der Stammfunktion über Intervallen bis auf additive Konstanten
- Existenz von Stammfunktionen bei stetigen Funktionen

ohne Beweis
Kontrastierung, z.B. durch Bestimmung aller
Stammfunktionen zu $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

ohne Beweis
z.B. die Existenz von Stammfunktionen
zu $x \mapsto \frac{1}{x}$
Wiederholung des Stetigkeitsbegriffs

Der auf der Riemann'schen Definition basierende Integralbegriff wird auf stetige Funktionen über abgeschlossenen Intervallen $[a;b]$ eingeschränkt. Als fundamentaler Satz stellt der Hauptsatz die Verbindung zur Differenzialrechnung her und ermöglicht das Berechnen von Integralen durch das Aufsuchen von Stammfunktionen. Die dabei anzuwendenden Regeln sind direkte Folgerungen aus dem Hauptsatz und den Ableitungsregeln. Die sich aus der Kettenregel ergebende Substitutionsregel wird nur für einfache Fälle behandelt; die Regel der partiellen Integration wird nicht behandelt. Bei schwierigen Integrationen vertraue man auf den Einsatz von Computeralgebrasystemen, jedoch sollte die Bedeutung von Integrationsregeln für die Arbeitsweise dieser Systeme hervorgehoben werden. Die Behandlung der numerischen Integration ist nur bei Verfügbarkeit von Taschencomputern sinnvoll. Über Flächeninhalte als Bestandsgrößen in Diagrammen lassen sich vielfältige Bezüge zu unterschiedlichen Sachgebieten herstellen. Darüber hinaus ist die grundlegende Bedeutung des Integralbegriffs für die Definition von Mittelwerten hervorzuheben. Den Abschluss des Kapitels bilden Modellierungen, die sich des Differenzial- und Integralkalküls bedienen.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Integralbegriff für stetige Funktionen

- Untersumme $U_n=U(f; Z)$, Obersumme $O_n=O(f; Z)$ bei äquidistanter Zerlegung Z von $[a;b]$ in n Teilintervalle
- Gleichheit des Grenzwertes der Unter- und Obersummen bei einer beliebigen Folge unbegrenzt feiner werdender äquidistanter Zerlegungen
- Definition des Integrals als gemeinsamer Grenzwert der Unter- und Obersummen bei einer Folge unbegrenzt feiner werdender äquidistanter Zerlegungen:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$
- Berechnung von Integralen
- Erweiterung des Integralbegriffs
 - Gleichheit der Integrationsgrenzen

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$
 - Vertauschung der Integrationsgrenzen

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Wiederaufgreifen der Begriffe aus dem Lernbereich 1
 die nicht notwendige Beschränkung auf Äquidistanz vereinfacht die Untersuchungen

@ Berechnen und Darstellen mit elektronischen Hilfsmitteln
 ohne Beweis, exemplarischer Nachweis z.B. mit Potenzfunktionen
 das Maximum der Intervalllängen wird beliebig klein

Interpretation als Summation infinitesimaler vorzeichenbehafteter Teilflächeninhalte (K6)

Bernhard Riemann (1826 - 1866)
 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Summation oder Rückführung auf Flächeninhaltsfunktionen und Stammfunktionen

als Definition

als Definition

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Integralfunktionen

- Definition:
 $I_c: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_c^x f(t) dt$ mit $c \in [a; b]$
- Hauptsatz:
 Wenn $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist,
 dann ist für jedes $c \in [a; b]$ die Integral-
 funktion $I_c: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion
 von f
- Folgerung:

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$
- explizite und implizite Darstellungen von
 Stammfunktionen

Eigenschaften des Integrals

- Linearität

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)) dt = \alpha \cdot \int_a^b f(t) dt + \beta \cdot \int_a^b g(t) dt$$
- Intervalladditivität

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$
- Berechnen von Integralen der Form

$$\int_a^b g(h(x)) \cdot h'(x) dx$$

Uneigentliche Integrale

- Integrationsgrenzen $+\infty$ oder $-\infty$
- Definition

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx$$

Bestandsgrößen in Diagrammen

- Flächeninhaltsbestimmungen an Graphen
- zwischen Graphen und der x -Achse
- zwischen zwei Graphen

Zusammenhang mit orientierten Flächen

Integrationsvariable neu benennen

Beweis ohne Nachweis der Existenz des Integrals (K1)
 die Umkehraussage ist falsch, weil Stamm-
 funktionen stets um beliebige additive Kon-
 stanten abgeändert werden können
 Gegenbeispiel: $f(x) = x$ und $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$

z.B. Kehrwertfunktion als Integrand
 è Lernbereich 3: \ln -Funktion

(K4), (K6)
 kann zum Beweis in Funktionenadditivität und
 Proportionalität aufgesplittet werden

(K4), (K6)

Beweis über Hauptsatz und Stammfunktion
 Stetige Differenzierbarkeit voraussetzen
 Umkehrung der Kettenregel
 keine Behandlung von Substitution 2. Art, partieller
 Integration und Partialbruchzerlegung

(K4), (K6)
 analog für untere Grenze
 Messung von Flächen, die sich ins Unendliche
 erstrecken

fakultativ:

- Integration mit Integrationsgrenze $b \in \mathbb{R} \setminus D$
- @ Bearbeitung der anstehenden Lösungsschritte mit CAS
 rationale und trigonometrische Funktionen; Wurzel-,
 Exponential- und Logarithmusfunktionen
- (K3)
 2 Weglänge im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, z.B.

$$s([t_1; t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$
- 2 Arbeit im Kraft-Weg-Diagramm, z.B.

$$W([r_1; r_2]) = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$
 im Zentralfeld

fakultativ:

- Bogenlänge von Kurven

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Mittelwertbestimmungen an Graphen

$$- \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- Mittelwertparallele

Rotationsvolumina

- Rotation um die x-Achse
- Prinzip von Cavalieri

$$V([a; b]) = \int_a^b A(x) dx$$

- 2 elektrische Leistung an ohmschen Widerständen bei Wechselstrom:
Mittelwert von x a $\sin^2(x)$

Mittelwertbegriff im Kontinuum

Ausgleich der Flächeninhalte ober- /unterhalb der Mittelparallelen (K4)

(K6)

Bei Rotationskörpern ist $A(x) = \pi \cdot (f(x))^2$ der Inhalt der Querschnittsfläche an der Stelle x

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)

Bezug zur Intervalladditivität beim Integralkalkül

fakultativ:

- Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel
- Füllkurven
- Rotation um die y-Achse

Ausgehend von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen und dem auf reelle Exponenten erweiterten Potenzbegriff werden zunächst Eigenschaften der Exponentialfunktionen untersucht. Die Proportionalität der Ableitungen zu den Funktionswerten führt zum Sonderfall der Gleichheit von Ableitung und Funktion und somit zur *e*-Funktion. Die *ln*-Funktion und Exponentialfunktionen sind sowohl innermathematisch wie auch in vielen Anwendungsbereichen von großer Bedeutung. Ihre Funktionaleigenschaften spiegeln sich in den Rechengesetzen für Potenzen und Logarithmen wieder.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Exponentielles Wachstum

- Beispiele
- charakteristische Merkmale
 - Quotientengleichheit
 - Grenzwertverhalten
- Potenzen mit reellen Exponenten

Exponentialfunktionen

- Eigenschaften der Funktionen:
 - $x \in a \cdot b^x, D=3$
 - Graphen
 - Wertebereich
 - Monotonie
 - Grenzwerte
 - Funktionaleigenschaft für $a = 1$
 - Zusammenhang zwischen $x \in a \cdot b^x$ und $x \in a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^x$ bzw. $x \in a \cdot b^{-x}$

e-Funktion

- Differenzierbarkeit von $x \in b^x$
 - Beweis: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$
- Definition der eulerschen Zahl *e*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72$$
- Definition der *e*-Funktion $x \in e^x$

è Einführungsphase: Wachstumsprozesse
geometrische Folge $a_n = a_0 \cdot q^n$
Kapitalentwicklung mit und ohne Zinseszins, Modelle der Bevölkerungsentwicklung, radioaktiver Zerfall, Abnahme des Blutalkoholgehaltes (K3)
Kontrastierung zum linearen Wachstum: multiplikative versus additive Änderung der Größe bei gleicher Zunahme der Argumente, Änderungsraten konstant versus proportional zum Bestand
è Klassenstufe 9: Potenzen
exemplarische Intervallschachtelungen zu b^x
@ Einsatz von Tabellenkalkulation
Übernahme der Rechengesetze

@ Einsatz von Funktionenplottern

für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$
 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

(K1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h} \right) = b^x \cdot f'(0)$$

Differenzierbarkeit an der Stelle 0 wird vorausgesetzt, Ableiten durch Strecken in *y*-Richtung

@ Berechnung von $f'(0)$ für versch. Basen

$\frac{1}{n}$

Wahl der speziellen Folge $n \cdot (b^{\frac{1}{n}} - 1)$ zur Berechnung von Näherungswerten von $f'(0)$
e als Basis der Exponentialfunktion mit $f'(0) = 1$
Leonhard Euler (1707-1783)

$$n \cdot (b^{\frac{1}{n}} - 1) = 1 \Leftrightarrow b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

alternative Bezeichnung: $\exp(x)$

Verbindliche Inhalte

- Eigenschaften der e -Funktion
 - Monotonie und Krümmung
 - Grenzwerte
 - Graph
- zusammengesetzte Funktionen mit Beteiligung der e -Funktion
 - Quotienten, Produkte und Verkettungen mit ganzrationalen Funktionen
 - Grenzwerte von $x^n \cdot e^{c \cdot x}$ für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$

\ln -Funktion

- Definition
- Eigenschaften
 - Differenzierbarkeit und Ableitung
 - Stammfunktionen
 - Monotonie und Krümmung
 - Nullstelle 1
 - Funktionaleigenschaften
 $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
 $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$
 - Folgerung: $b^x = e^{x \cdot \ln(b)}$
 - Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow 0^+$
 - Wertemenge
 - Integralfunktion $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Vorschläge und Hinweise

Anwenden der Kriterien
 è 1. Halbjahr:
 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

z.B. hyperbolische Funktionen \sinh, \cosh
 $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}); \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x});$
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Hyperbelgleichung versus Kreisgleichung
 z.B. Gaußfunktionen $x \in a \cdot e^{-k \cdot (x-u)^2}$

è 4. Halbjahr: Binomialverteilung
 @ Hinauszoomen der Graphen zur Darstellung des Grenzwertverhaltens

als Umkehrfunktion der e -Funktion
 Kleinscher Weg der Einführung der
 \ln -Funktion: $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$

als Alternative zum vorliegenden Lehrplan (K5)
 è fakultativ im 1. Halbjahr:
 Ableitungsregel für die Umkehrfunktion

Die Differenzierbarkeit und der Ableitungsterm ergeben sich durch Anwenden der Kettenregel:
 $\ln(e^x) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(e^x) = \frac{d}{dx} x$
 $\Rightarrow \frac{d}{dy} \ln(y) \cdot e^x = 1 \Rightarrow \frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}$

$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$

Folgerungen aus Eigenschaften der e -Funktion

Folgerungen aus der Funktionaleigenschaft der e -Funktion bzw. aus den Potenzgesetzen

Zurückführen auf Grenzwerte der e -Funktion oder Symmetriebetrachtung und Abschätzungen am Graph der Kehrwertfunktion

è Lernbereich 2: Integralfunktionen
 geometrische Deutung als Flächeninhaltsfunktion

Verbindliche Inhalte

- zusammengesetzte Funktionen
 - Quotienten, Produkte und Verkettungen mit ganzrationalen Funktionen
 - Grenzwerte von $x^n \cdot \ln(x)$ für $x \rightarrow +\infty$
 - Graph von $\ln(g(x))$ durch Verkettung der Graphen von g und \ln
 - Stammfunktionen zu $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Logarithmusbegriff

- Logarithmusbegriff
 - $\log_b(x)$ als Lösung von $b^y = x$
 - $\log_b(1) = 0$
 - $\log_b(b) = 1$
 - $\ln(x) = \log_e(x)$
 - $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

Modellieren von Wachstumsprozessen

- exponentielles Wachstum
 - Differenzialgleichung $f'(x) = k \cdot f(x)$
 - Anwendungsaufgaben
- beschränktes Wachstum
 - Differenzialgleichung $f'(x) = k \cdot (S - f(x))$
 - Anwendungsaufgaben

Vorschläge und Hinweise

@ Hinauszoomen der Graphen zur Darstellung des Grenzwertverhaltens

$$F(x) = \ln(|g(x)|)$$

(K4), (K5)

Beschränkung auf Basen $b > 1$
(ohne Einschränkung der Allgemeinheit)
Eindeutigkeit der Lösung thematisieren

aus den Funktionseigenschaften der \ln -Funktion ergeben sich die Logarithmengesetze

fakultativ:

- allgemeine Logarithmusfunktionen
 $x \text{ a } \log_b(x)$

Beschreibung von Wachstumsvorgängen und von periodischen Vorgängen (fakultativ) (K3)
Begriff „Wachstum“ schließt den „Zerfall“ ein

2 radioaktiver Zerfall

Lösen durch Übergang zur Funktion $g = S - f$
Beispiele aus Natur, Gesellschaft und Wirtschaft

fakultativ:

- logistisches Wachstum
- harmonische Schwingung

Im Unterricht erfolgt der Zugang zu Vektoren auf klassische Weise durch Translationen. Die Veranschaulichung der Vektoren als Pfeile, welche wiederum die Translationen repräsentieren, erhebt nicht den Anspruch, ein Modell für weitergehende Interpretationen zu liefern. Im Vordergrund stehen die Beziehungen zwischen den neuen Objekten. Im vorliegenden Lernbereich geht es um das Bereitstellen und den rechnerischen Umgang mit dem neuen Kalkül. Bezüge zu realen Situationen sind anzustreben.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Punkte im Anschauungsraum

- Punkte als geometrische Grundbausteine
 - Symbole A, B, C, \dots, P, Q
 - Anschauungsraum E^3
- kartesisches Koordinatensystem
 - Dimensionalität
 - paarweise orthogonale Achsen
 - Rechtssystem
- Punkte und ihre Koordinaten
 - Koordinatentripel
 - Symbolik $P(p_1 | p_2 | p_3)$
 - Sprechweise: Koordinaten eines Punktes
 - Darstellung im Schrägbildverfahren

Auffassung des Raumes als Punktmenge

euklidischer Abstandsbegriff
René Descartes (1596 – 1650)
è Klassenstufen 5 und 6: Koordinatensysteme

Dreifingerregel der rechten Hand
2 Lorentzkraft
umkehrbar eindeutige Zuordnung
Koordinatenquader (K4)
Einbettung von E^2 in E^3

Hilfslinien zum Ablesen von Koordinaten,
z.B. Punkt als Eckpunkt eines Koordinatenquaders, Problem der Nichteindeutigkeit
@ 3D-Visualisierungen

Translationen als Vektoren

- Translationen in verschiedenen Kontexten
- Pfeildarstellung
 - Symbol $\overrightarrow{PP'}$
- Ortsvektoren
 - Definition
 - Symbolik \overrightarrow{OA} oder auch \vec{a}
- Komponentendarstellung
 - Sprechweise: Komponenten eines Vektors
 - Symbol $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im 3^3 bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im 3^2
 - Einbettung von 3^2 in 3^3

Bewegungen von Figuren bei Brettspielen, von Körpern im Raum, von Graphen
è Klassenstufe 7: Symmetrie durch Verschiebung (Bandornamente)
2 vektorielle physikalische Größen
unendlich viele parallele, gleich lange Pfeile mit gleicher Orientierung
è Klassenstufe 6: Darstellung einer rationalen Zahlen durch unendlich viele Brüche
unendlich viele Paare von Punkten mit gleicher Differenz der Koordinaten

Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung

Translation, die den Ursprung auf A abbildet
umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Punkt und Ortsvektor
die Koordinaten des Punktes sind die Komponenten des Ortsvektors
der Pfeil für \overrightarrow{OA} , im Ursprung angetragen, endet in A (K4)

mit den Komponenten $a_i = p_i' - p_i$

dritte Vektorkomponente 0 setzen

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Bezeichnung Vektor
 - Symbol \vec{a}

- Nullvektor als Translation \overrightarrow{PP}
 - Symbol $\vec{0}$

- Gegenvektor als Umkehrtranslation
 - Symbol $-\vec{a}$

- Addition von Vektoren als Hintereinanderausführung von Translationen
 - Symbolik $\vec{a} + \vec{b}$
 - im Pfeilbild: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
 - als komponentenweise Addition
 - Kommutativität und Assoziativität

- Subtraktion als Addition des Gegenvektors

- S-Multiplikation als Vervielfachung einer Translation
 - Symbolik $\lambda \cdot \vec{a}$
 - als komponentenweise Multiplikation
 - gemischte Assoziativität

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$
 - zwei Arten von Distributivität

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$
 - Kollinearität zweier Vektoren

- 3^3 als Vektorraum der Translationen
 - Grundeigenschaften eines Vektorraums

Identifikation: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

entartete Pfeile

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{PP'}, \quad -\vec{a} = \overrightarrow{P'P}$$

Bedeutungen des Minuszeichens

Abbildung von $3^3 \times 3^3 \rightarrow 3^3$

neue Bedeutung des Pluszeichens

Aneinanderfügen von Pfeilen, Parallelogramm-diagonale

2 Kräfteparallelogramm

Veranschaulichen durch Wege am Parallelogramm bzw. am Spat

neue Bedeutung des Minuszeichens

è Klassenstufe 6: Subtraktion ganzer Zahlen
 Pfeil des Differenzvektors erstellen
 Darstellen von Vektoren in Körpern als Summen und Differenzen von Kantenvektoren

è Klassenstufe 9: zentrische Streckung
 Konstruktion der Pfeile durch zentrische Streckung
 neue Bedeutung des Malzeichens
 Veranschaulichen in Pfeilbildern
 Abbildung von $3 \times 3^3 \rightarrow 3^3$

Anwenden der Strahlensätze

(K5)

komponentenweises Nachrechnen

Folgerungen: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (Unitarität);

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Parallelität der Pfeile $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{a} = \mu \cdot \vec{b}$

Sonderfall:

Der Nullvektor ist kollinear zu jedem Vektor

è Lineare Abhängigkeit

Zusammenstellen der bereits erarbeiteten Eigenschaften, Begriff der abelschen Gruppe

Euklidischer Vektorraum

- Definition des Betrags eines Vektors
 - Symbolik: $|\vec{a}|$
 - $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
 - Verträglichkeit mit dem Zahlenbetrag
 $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
 - Normieren von Vektoren: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

- Länge einer Strecke: $|\overline{PQ}| = |\overrightarrow{PQ}|$

- Winkel zwischen zwei Vektoren
 - Definition als geometrisches Objekt
 - Berechnung über den Kosinussatz

- Standardskalarprodukt zweier Vektoren
 - Definition: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
 - Symbolik: $\vec{a} \bullet \vec{b}$
 - Kommutativität: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
 - Distributivität: $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
 - Verträglichkeit mit der S-Multiplikation:
 $\lambda \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda \cdot \vec{b})$
 - Betragsformel $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$
 - Winkelformel $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

- Orthogonalität zweier Vektoren
 - Definition über $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
 - Sonderrolle des Nullvektors
 - paarweise Orthogonalität dreier Vektoren
 - senkrechte Projektion von \vec{a} auf \vec{b}
 - $\vec{a}_{\vec{b}} = \left(\vec{a} \bullet \vec{b}^0 \right) \cdot \vec{b}^0$

- Abbildung von $3^3 \rightarrow 3$
- Diagonalenlänge eines Koordinatenquaders
 è Klassenstufe 8: Satz von Pythagoras
- (K5)
- Kennzeichnung durch hochgestellte 0
-
- Betrag der Translation \overrightarrow{PQ}
- mit konkreten Zahlen bzw. Koordinaten
- Abbildung von $3^3 \times 3^3 \rightarrow 3$
- (K5)
- Rückführen auf die Rechengesetze in 3
- Frage nach der Assoziativität von \bullet nicht sinnvoll
-
- 2 Arbeitsbegriff der Physik
-
- Aufspannen eines Quaders
 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{c} \bullet \vec{a} = 0$
- Betrag der senkrechte Projektion von \vec{a} auf \vec{b} :
- $$|\vec{a}_{\vec{b}}| = \left| \vec{a} \bullet \vec{b}^0 \right|$$
- mögliche Hinführung zur Definition von \bullet
 Konzept des Neutralen und inversen Elements bzgl. \bullet nicht sinnvoll
- 2 Superpositionsprinzip für Kräfte oder Bewegungen
- Zerlegung von Vektoren in Richtungskomponenten

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Vektorprodukt
 - Symbolik $\vec{a} \times \vec{b}$
 - Definition:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
 - Orthogonalität zu den Faktoren
 - Antisymmetrie $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
 - Rechtssystem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$
 - Verträglichkeit mit der S-Multiplikation
 - Betrag des Vektorprodukts

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$
 - Flächeninhalt eines Parallelogramms
 - Kollinearitätskriterium $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Spatprodukt
 - Definition als $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
 - Volumen des aufgespannten Spats

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$
 - Volumen der dreiseitigen Pyramide
 - Komplanarität dreier Vektoren
 - Komplanaritätskriterium

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$
 - Sonderrolle des Nullvektors
- Eigenschaften besonderer ebener Figuren

Synonym: Kreuzprodukt
 Abbildung von $3^3 \times 3^3 \rightarrow 3^3$
 Definition nur im 3^3 möglich
 (K5)

Einstieg über die gleichzeitige Orthogonalität zu \vec{a} und \vec{b}

zyklisches Vertauschen der Indizes

Dreifingerregel der rechten Hand
 2 Lorentzkraft
 Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

Rechnen mit Komponenten und Verwendung von $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$

Abbildung von $3^3 \times 3^3 \times 3^3 \rightarrow 3$
 Berechnungsregel von Sarrus
 Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)

mit zyklischer Vertauschbarkeit der Vektoren

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Parallelität aller drei Pfeile zur selben Ebene
 $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$ bzw. $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{c}$
 bzw. $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

Bezüge zur Kollinearität herstellen
 Verallgemeinerung:
 lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit
 (K5)

z.B. Mittendreieck, Diagonalen in Parallelgramm, Raute oder Quadrat, Winkel im Halbkreis
 Nachweis von bereits bekannten Eigenschaften mit Hilfe der Vektorrechnung

Der Euklidische Raum ist ein einfaches mathematisches Modell des Anschauungsraumes. In diesem Lernbereich sollen die mathematischen Hilfsmittel erweitert und bei der Bewältigung anwendungsbezogener Fragestellungen im dreidimensionalen Raum eingesetzt werden. Die Auszeichnung eines festen Punktes als Ursprung des Koordinatensystems und die Zuordnung zwischen Ortsvektoren und Punkten ist Grundlage der vektoriellen Behandlung der Lage von Punkten und ihrer Beziehungen. Angesichts der Beschränktheit der Punktmengen in Körpern gewinnen die Definitionsbereiche der Parameter in den Darstellungen von Strecken und Flächen gegenüber dem traditionellen Ansatz mit Geraden und Ebenen an Bedeutung.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Linearkombination von Vektoren

- Linearkombinationen von Vektoren
- Gaußscher Algorithmus

Geometrische Grundobjekte

- Besondere Punkte einfacher Gebilde
 - Mittelpunkt einer Strecke

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$$
 - Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$
 - Eckenschwerpunkt eines Tetraeders

$$\vec{OS} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$
- Geraden und Strecken
 - Punktrichtungsgleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$
 - Punktprobe
 - parameterfreie Gleichung:

$$\vec{u} \times (\vec{x} - \vec{a}) = \vec{0}$$
 Plücker-Form
 - Lagebeziehungen

- @ numerisches Lösen von Gleichungssystemen (K5)
 Einüben mit maximal drei Gleichungen und vier Variablen bei ganzzahligen Lösungstripeln auch ohne elektronische Hilfsmittel
- @ Einsatz elektronischer Hilfsmittel
fakultativ:
 - Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit
 - Erzeugendensystem, Basis
 - Teilverhältnisse in Figuren und Körpern
- @ Einsatz eines 3D-Plotprogramms
 z.B. gemeinsamer Mittelpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms bzw. der Raumdiagonalen eines Spats
 Nachweis, dass das Mittenviereck eines beliebigen geschlossenen Polygonzuges mit vier Ecken ein (ebenes) Parallelogramm ist
 Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt stimmen bei Dreiecken überein
- (K4)
 Parametergleichung mit passendem Parameterbereich
 Verwendung der Begriffe Stützvektor und Richtungsvektor
 Austauschbarkeit des Stützvektors, Skalierbarkeit des Richtungsvektors
 umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Parameterwert und Punkt
 innere und äußere Punkte einer Strecke
- Julius Plücker (1801- 1868)
 Parallelität, Identität, Windschiefe, Schnitt
- è Klassenstufe 8: Lineare Gleichungssysteme
- è Gaußscher Algorithmus

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Ebenen und Flächen
 - Punkttrichtungsgleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$
 - Punktprobe
 - parameterfreie Gleichungen:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$
 Normalenform,
 Koordinatenform,
 Hesse-Form
 - Lagebeziehungen
 - Schnittwinkel

Abstände

- Definition als minimale Entfernung
- Abstand Punkt-Punkt
 - Symbolik $d(P;Q)$
 - $$\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$
- Abstand Punkt-Gerade
 - Symbolik $d(P;g)$
- Abstand Punkt-Ebene
 - Symbolik $d(P;e)$
- Spiegelpunkte

- (K4)
 Parametergleichung mit passendem Parameterbereich
 Stützvektor und Richtungsvektoren austauschbar, Richtungsvektoren linear unabhängig
 umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Parameterwertepaar und Punkt
 Interpretation als Leitgerade $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit angehängten Parallelen $\vec{x} = \mu \cdot \vec{v}$
 innere und äußere Punkte einer Fläche
 Schnittgebilde
 Verwendung des Begriffs Normalenvektor
- auch in Achsenabschnittsform
 Ludwig Otto Hesse (1811 - 1874)
 auch zu Geraden bzw. Strecken
 è Klassenstufe 8: Lineare Gleichungssysteme
 è Lernbereich 1: Gaußscher Algorithmus
- (K5)
 minimale Entfernung je zweier Punkte der beteiligten Punktmengen (soweit existent), Vermeidung des Infimum-Begriffs
- è Klassenstufe 8: Satz von Pythagoras
 @ Berechnung mit elektronischen Hilfsmitteln
- (K2)
 Alternative Vorgehensweisen:
 – Berechnung als Schnittproblem mittels einer Hilfsebene
 – elementargeometrischer Ansatz

$$d(P;g) = \left| \vec{u}^0 \times \overrightarrow{AP} \right|$$
 – analytische Lösung als Extremwertproblem
- (K2)
 Mögliche Vorgehensweisen
 – Berechnung als Schnittproblem mit Lotgerade
 – elementargeometrischer Ansatz

$$d(P;e) = \left| \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{AP} \right|$$
- an Punkten, Geraden und Ebenen

Verbindliche Inhalte**Vorschläge und Hinweise****Untersuchungen an einfachen Polyedern**

- Streckenlängen
- Winkelmaße
- Flächeninhalte
- Volumina
- Abstände

Anwendungen an Punktmengen im Alltag

z.B. Quader, Prisma, Pyramide
Kontextbezüge erwünscht
è Klassenstufe 6: Schrägbildverfahren
(K2)

mit Bestimmung von Lotfußpunkten

(K3), (K2)

z.B. im Zusammenhang mit Lichtstrahlen
(Reflexion, Spiegelbild und Schattenbildung),
Bahnen geradliniger Bewegungen
(Treff- und Navigationsprobleme),
Lage- und Formbeschreibung von Objekten
(Landschaft und Architektur)

Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind bereits in den vorausgehenden Klassenstufen behandelt worden. Wiederholungen sollten dazu genutzt werden, altersgemäße Kontexte zu wählen und Aufgaben von größerer Komplexität zu bearbeiten.

Die fachsystematische Behandlung erfolgt entlang den von Kolmogorow aufgestellten Grundeigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. In Kontexten wird ein verständiger Umgang mit der Symbolik eingefordert.

Die Kombinatorik stellt für die verschiedenen Urnen- und Kastenmodelle geeignete Zählverfahren bereit, die hier vorrangig dem Verständnis der in der Stochastik auftretenden Termstrukturen dienen soll.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Umgang mit der Symbolik

- Verknüpfen von Ereignissen
 - Gegenereignis \bar{A}
 - UND-Ereignis $A \cap B$
 - ODER-Ereignis $A \cup B$
 - Regeln von de Morgan
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 - Zerlegungssatz
 $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
 - Vierfeldertafel mit den Ereignissen
 $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$
- Grundeigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes
 - als Funktion von der Ereignismenge nach 3
 - Nichtnegativität: $P(A) \geq 0$
 - Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
 - Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
für unvereinb. Ereignisse
- Folgerungen aus den Grundeigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes
 - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\{\omega_j\})$

Kombinatorische Zählverfahren

- k -Tupel
 - Anzahl: $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$
(Multiplikationssatz)
 - Sonderfall: n^k

Visualisieren an Venn-Diagrammen
John Venn (1834 - 1923)

(K4)
sprachliche und formale Fassungen

Augustus de Morgan (1806 - 1871)

Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987)
Erweiterung der Definition der Wahrscheinlichkeit
von Ergebnissen

Veranschaulichen an Venn-Diagrammen

Additionssatz
2. Pfadregel

Beschränkung auf die Grundtypen
(K3), (K4), (K6)
Urnenmodell (Ziehen von Kugeln)
mit bzw. ohne Zurücklegen
mit bzw. ohne Beachten der Reihenfolge
Kastenmodell (Belegen mit Kugeln) analog
è 1. Halbjahr: Vollständige Induktion
mit Zurücklegen, mit Beachten der Reihenfolge

Würfel, Glücksräder, Codes

Verbindliche Inhalte

- k -Permutationen
 - Anzahl: $\frac{n!}{(n-k)!}$
 - Sonderfall: $k = n$
- k -Teilmengen
 - Anzahl: $\binom{n}{k}$
 - Sonderfall: $k = 0$
 - $\binom{m}{l} \cdot \binom{n-m}{k-l}$

Modellieren von Zufallsexperimenten

- Laplace-Wahrscheinlichkeit
 - Gleichverteilung: $P(A) = \frac{k}{n}$
 - Beispiele
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
 - Definition $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 - unabhängige Ereignisse
- Bernoulli-Wahrscheinlichkeit
 - Bernoulli-Experiment
 - Bernoulli-Kette
 - Binomialverteilung
 - $P(A) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
 - Summenwahrscheinlichkeiten

Vorschläge und Hinweise

ohne Zurücklegen, mit Beachten der Reihenfolge (K5)

Permutationen
 ohne Zurücklegen, ohne Beachten der Reihenfolge
 Binomialkoeffizienten, Pascal-Dreieck, binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

mit den Sonderfällen
 $a=1 \wedge b=1$ sowie $a=-1 \wedge b=1$

aus einer Urne mit n Objekten, von denen m ein bestimmtes Merkmal haben, werden k Objekte gezogen, von denen l das Merkmal der m Objekte haben

fakultativ:

- k -Kombinationen $\binom{n+k-1}{k}$

@ Simulation von Zufallsexperimenten mittels Pseudozufallszahlen

è Klassenstufe 7: Laplace-Experimente
 Allgemeines Zählprinzip
 vereinfachende Annahmen, Idealisierungen, klassische Wahrscheinlichkeit
 Gleichverteilung durch Verfeinern der Ergebnismenge
 Münze, Würfel, Glücksrad, Kartenspiel (K3)

Ummodellieren
 Beispiele: Augensumme beim Doppelwürfel, symmetrisches Galton-Brett
 Francis Galton (1822 – 1911)

è Klassenstufe 9: Bedingte Wahrscheinlichkeit

(K3)
 zweielementige Ergebnismenge:
 Treffer/Niete, Erfolg/Misserfolg
 Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$
 Zerlegen der Ergebnismenge nach A und \bar{A}
 Bernoulli-Experiment durch Vergrößern der Ergebnismenge
 unabhängiges Wiederholen desselben Bernoulli-Experimentes (K5)

im Sinne einer Verteilung der Wahrscheinlichkeitswerte auf die Trefferzahlen als Elementarereignisse

Veranschaulichung am Galton-Brett
 @ Summationen mit elektronischen Hilfsmitteln
 Einsatz von Tabellenwerken

Mit der Einführung des Begriffs der Zufallsgröße als eine auf der Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes reellwertige Funktion treten quantitative Aspekte in der Stochastik in den Vordergrund. Zufallsgrößen werden z. B. bei Fragen der Qualitätskontrolle, der Gewinnerwartung, der Rentabilität und Risikobewertung betrachtet. In diesem Lernbereich beschränke man sich im Wesentlichen auf diskrete Zufallsgrößen. Im Lehrplan treten nichtdiskrete Zufallsgrößen nur fakultativ im Zusammenhang mit der Normalverteilung auf, die als Näherung der Binomialverteilung angesprochen wird. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel sind umfangreiche numerische Berechnungen ohne großen Aufwand durchzuführen.

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

Diskrete Zufallsgrößen

- Definition
 - Beispiele aus dem Alltag
 - Diskretisierung durch Klasseneinteilung
 - als Funktion von Ω nach \mathbb{R}
 - Symbol $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 - Ereignisse als Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen mit $X(\omega)$
 - Einteilung der Ergebnismenge in paarweise unvereinbare Ereignisse durch $X(\omega) = x_i$
- lineare Transformation $a \cdot X + b$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung als Funktion von $X(\Omega)$ nach \mathbb{R} bzw. nach $[0;1]$
- Anwendungen

Charakteristische Größen

- Erwartungswert
 - Gewichtete Mittelwerte
 - Definition des Erwartungswertes
 - $$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) \cdot x_i$$
 - Symbol $E(X)$ bzw. μ
 - Anwendungsbeispiele

- abzählbare Wertemenge
- z.B. Spielpläne bei Glücksspielen, Häufigkeiten, Bewertungen
- Intervalle von Messwerten bei Längen, Massen, Zeitangaben
- è Normalverteilung stetiger Zufallsgrößen (K4)
- Sprechweise: Zufallsgröße auf Ω
- z.B. $X(\omega) = x_i, X(\omega) > x_i$
- Klasseneinteilung von Ω
- è Lernbereich 1: Wahrscheinlichkeitsmaß jedem Wert x_i der Zufallsgröße wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X(\omega) = x_i$ zugeordnet
- Vergrößerung der Ereignismenge
- z.B. Wahrscheinlichkeiten für Gewinne, Ausfälle, Kosten
- è Lernbereich 1: Simulationen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Simulationen können auch dort weiterhelfen, wo eine Modellierung nicht möglich ist.
- Mittelwertberechnungen durch Wichten mit den relativen Häufigkeiten bei Gewinnen, Verlusten, Kosten
- è Klassenstufe 7: Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für die relative Häufigkeit
- (K4)
- Kalkulation von Versicherungsprämien, Gewinnchancen, Kosten, Rentabilität, Risikoabwägung als Erwartungswerte
- 2 Massenschwerpunkt

Verbindliche Inhalte

Vorschläge und Hinweise

- Verhalten bei linearen Transformation
 $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
- Verhalten beim Quadrieren
 $E(X^2) = \sum P(X = x_i) \cdot x_i^2$
- Varianz
 - Abweichungsmaße vom Erwartungswert
 - Definition der Varianz: $E((x - \mu)^2)$
 - Symbol $Var(X)$
 - $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Standardabweichung bzw. Streuung
 - Definition $\sqrt{Var(X)}$
 - Symbol $\sigma(X)$
 - Verhalten bei linearer Transformation
 $\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$
- Anwendungen

Binomialverteilung

- Definition
 - $P(X = k) = B(n; p; k)$
 - Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten
- Erwartungswert und Standardabweichung
 - $E(X) = n \cdot p$
 - $\sigma(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
 - Abschätzung $p \cdot (1-p) \leq 0,25$
 - Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$
- Anwendungen im Alltag

rechnerischer Nachweis
 Sonderfälle $a=0$ bzw. $b=0$ beachten
 Folgerung: $E(X - \mu) = 0$
 $E(X^2) \neq (E(X))^2$
 2 Trägheitsmoment
 Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen vom Erwartungswert bei unterschiedlichen Verteilungen
 Diskussion über Vor- und Nachteile von $X - \mu$, $|X - \mu|$, $(X - \mu)^2$, ... (K6)
 Erwartungswert der Quadrate der Abweichungen
 Die Varianz ist genau dann Null, wenn die Zufallsgröße konstant ist.
 Die Funktion $e(x) = E((X - x)^2)$ besitzt an der Stelle $x = \mu$ ihr absolutes Minimum.
 rechnerischer Nachweis

fakultativ:

- Tschebyschow-Ungleichungen
- Interpretation der Trefferzahlen als Werte einer Zufallsgröße
- è Lernbereich 1: Bernoulli-Kette
- z.B. $P(X > k)$, $P(k_1 \leq X \leq k_2)$
- Multiple-Choice-Test, Qualitätskontrollen, Schadenverlauf, Verteilung idealer Gase (K3)
- @ Einsatz elektronischer Hilfsmittel (K3)
- formale Herleitung z.B. durch Ableiten des Polynoms $(p + q)^n$ nach p
- Konvergenz der Wahrscheinlichkeit für die Abweichung der relativen Häufigkeit vom Erwartungswert
- Formel interpretieren, nicht herleiten (K3)
- fakultativ:**
 - Normalverteilung